विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

भाग 16 | जनवरी, 1973 | संख्या 1

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 1, Jaunary, 1973, Pages 1-6

विद्युत-वैश्लेषिक रसायन की भारत में प्रगति*

डा० रमेश चन्द्र कपूर
रसायन विभाग जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

विज्ञान परिषद् की आज की अनुसन्धान गोष्ठी की अध्यक्षता के लिए आपने मुझे आमंत्रित किया, यह मेरे लिए गौरव की बात है। इसके लिए परिषद् का आभारी हूँ।

विद्युत-वैश्लेषिक रसायन में मेरी रुचि वर्षों से रही है। यहाँ भारत में इसकी प्रगति के सम्बन्ध में कुछ बातें कहना चाहूंगा।

विद्युत-वैश्लेषिक रसायन ऐसा विषय है जिसमें अनेक तकनीकों का उपयोग होता है, विशेषतया पोलैरोग्राफी के कारण पिछले पचीस वर्षों में इस विषय की लोकप्रियता काफी बढ़ गई है। पोलैरोग्राफी का आविष्कार आज से 50 वर्ष पूर्व प्रोफेसर हेरावेस्की ने चेकोस्लोवाकिया में किया था। उस समय तक वैश्लेषिक रसायन में किसी वैद्युत तकनीक का उपयोग नहीं होता था परन्तु क्रमशः इसमें अनेक तकनीकों का समावेश होता गया। इनमें विभवमिति (Potentiometry), चालकतामिति (conductometry), पोलैरोग्राफी (Polarography), विद्युतभारमिति (Electrogravimetry), कालऐम्पियरोमिति (chronoamperometry), कालविभवमिति (chronopote ntiometry), उल्लेखनीय हैं। अब वैश्लेषिक रसायन में विद्युत उपकरणों का प्रचुरता से उपयोग होने लगा है जिससे तत्वों तथा अनेक यौगिकों का न्यूनतम मात्रा में निश्चयन संभव हो सका है।

विद्युत प्रभावों का उपयोग विश्लेषण कार्य के लिए दो प्रकार से किया जा सकता है :

(1) **तुल्य बिन्दु की पहचान** : अनुमापन के समय तुल्य बिन्दु पर विलयन के विद्युत गुणों में एकाएक अंतर आ जाता है। इस अंतर को जान लेने पर विश्लेषण संभव हो जाता है। तुल्य बिन्दु ज्ञात करने के लिए विभव अथवा चालकता जैसे गुणों का उपयोग किया जा सकता है।

(2) **पदार्थों की मात्रा ज्ञात करना** : विद्युतधारा के उपयोग द्वारा यह मात्रा जानी जा सकती है। इन विधियों में भी इलेक्ट्रानिक तकनीकों में प्रगति के कारण सुधार हुए हैं। इस प्रणाली को सुलभ बनाने में यन्त्रीकरण से अत्यधिक सहायता मिली है।

अब विद्युत-वैश्लेषिक तकनीकें निम्नांकित वर्गों में विभाजित की जा सकती हैं :—

*3 जनवरी 1973 को चंडीगढ़ में आयोजित, विज्ञान अनुसंधान गोष्ठी पर दिया गया अध्यक्ष-पदीय भाषण

चालकतामिति : दो इलेक्ट्रोडों द्वारा किसी रासायनिक निकाय पर विभवांतर लाने से विद्युत-धारा का प्रवाह होता है। यदि यह धारा केवल आवेश वाहक की मात्रा तथा स्वरूप पर निर्भर हो तो इस प्रणाली को हम चालकतामिति कहेंगे। चालकतामिति प्रणाली अनेक वैश्लेषिक कार्यों में प्रयुक्त की जाती है। अनुमापन कार्यों में तो इसकी विशेष उपयोगिता है।

वोल्टधारामिति : इस प्रणाली में विद्युत-धारा की मात्रा इलेक्ट्रोड विलयन अन्तरापृष्ठ की ध्रुवित अवस्था पर निर्भर करती है। ऐसी अवस्था में दो इलेक्ट्रोडों के बीच विभवांतर करने पर ऐसा धारा-प्रवाह होगा जो विभवांतर की मात्रा पर निर्भर होगा। विभवांतर में परिवर्तन करके प्रत्येक विभवांतर द्वारा उत्पन्न धारा को नापने पर वोल्टधारामिति वक्र बनेगा। इसमें एक ही इलेक्ट्रोड का ध्रुवण होता है तथा दूसरे इलेक्ट्रोड पर विभवांतर का प्रभाव नहीं पड़ता। इसी प्रणाली का पोलैरोग्राफी एक विशेष रूप है, जिसमें बिन्दुपाती पारद इलेक्ट्रोड (Dropping mercury electrode) का उपयोग होता है।

ऐम्पियरोमिति : यदि वोल्टधारामिति के प्रयोगों में एक सुनिश्चित विभवांतर रखा जाय तो धारा की मात्रा यौगिक विशेष की सान्द्रता पर निर्भर होगी। इस विधि से अनुमापन क्रिया को ऐम्पियरोमिति कहा जाता है। सूक्ष्मतम सान्द्रता में उपस्थित अनेक यौगिकों की मात्रा इसी विधि से ज्ञात की जाती है।

काल विभवमिति : इस विधि में नियत मात्रा की धारा प्रवाहित की जाती है। इसके फलस्वरूप समयानुसार इलेक्ट्रोड विलयन अंतरापृष्ठ के प्रतिरोध में आये अन्तर को नापते हैं।

काल ऐम्पियरोमिति : यह नियत विभव पर समय के प्रभाव से धारा परिवर्तननापने की विधि है।

कूलॉममिति : किसी विशेष वैद्युत रासायनिक अभिक्रिया सम्पन्न करने के हेतु एक नियत विद्युत आवेश की आवश्यकता होती है। इसकी मात्रा फैरेडे के विद्युत अपघटन नियम द्वारा निश्चित की जा सकती है। इसी मात्रा द्वारा अभिकर्मक का आकलन किया जाता है।

विद्युत भारमिति : धारा प्रवाह के फलस्वरूप इलेक्ट्रोड पर वांछित घटक का निक्षेप करके तोलन द्वारा उसकी मात्रा ज्ञात करने की विधि को विद्युत-भारमिति कहते हैं।

विभवमिति : दो प्रावस्थाओं के बीच अंतरापृष्ठ में उत्पन्न विभव की मात्रा दोनों प्रावस्थाओं के संघटन पर निर्भर रहती है। ऐसे दो अंतरापृष्ठों को संबद्ध करने पर उनके बीच विभवांतर आने पर विद्युत-रासायनिक सेल की रचना हो जाती है। इस सेल में उत्पन्न विद्युत वाहक बल (EMF) का घटकों की सान्द्रता से संबंध रहता है। इसी संबंध पर विभवमिति आधारित है।

विद्युत वैश्लेषिक तकनीकें प्रायः सरल होती हैं क्योंकि सामान्यतया उनमें एक-जैसी यांत्रिकी का उपयोग होता है। समस्त विधियों के प्रयोगों को थोड़े से आधारभूत यंत्रों द्वारा सम्पन्न किया जा सकता है। इस समय हमारे देश में अनेक स्थानों पर विद्युत वैश्ले- षिक अनुसंधान कार्य हो रहे हैं तथा

सभी विश्वविद्यालयों की स्नातकोत्तर कक्षाओं में इसकी शिक्षा दी जाती है। अनेक औद्योगिक संस्थानों में भी इस प्रणाली का उपयोग किया जा रहा है। इनमें से कुछ का विवरण वांछनीय होगा।

भाभा परमाणु अनुसंधान केन्द्र, ट्राम्बे : इस संस्थान में धातुकर्म ग्रुप के अंतर्गत नौ संविभाग है। इनमें से एक वैश्लेषिक संविभाग भी है जिसमें परमाणु विज्ञान से संबंधित समस्याओं के समाधान के लिए विद्युत-वैश्लेषिक रसायन का उपयोग किया जाता है। वोल्टधारामिति संबंधी अनेक प्रयोगों में धातु तथा मिश्रधातु से बने इलेक्ट्रोडों के उपयोग हुए हैं। ये कार्यकारी तथा मानक इलेक्ट्रोडों के रूपों में प्रयुक्त हुए हैं। कुछ प्रयोगों में बिन्दुपाती पारद इलेक्ट्रोड तथा मालिब्डनम मानक इलेक्ट्रोड द्वारा आयनों के पोलैरोग्राफीय अध्ययन सम्पन्न हुए हैं। इन अध्ययनों के फलस्वरूप अम्ल-क्षार अनुमापन विधि अधिक सुग्राही बनायी जा सकी है। इन अनुसंधानों द्वारा यह भी ज्ञात हुआ कि अजलीय विलयनों में काँच की अपेक्षा मालिब्डनम द्वारा पी-एच का मापन अधिक सुविधाजनक होता है। विभवधारामिति द्वारा मिश्रित कार्बनिक विलायकों में न्यूनतम अकार्बनिक अपद्रव्यों की पहचान संभव हो सकती है।

विद्युत रासायनिक संस्थान, कराईकुड़ी : इस संस्थान में दस समूह हैं और सबों में विद्युत रासायनिक अनुसंधान किये जा रहे हैं। फैरेडे के दिष्टकरण (Faradaic rectification) पर यहां विस्तार से कार्य हो चुका है। इसके फलस्वरूप रिडाक्सगतिक अनुमापन (Redoxo kinetic titration) प्रणाली का आविष्कार हुआ जिससे कुछ धातु आयनों [जैसे V(II)] का निश्चयन संभव हो गया। इसके अतिरिक्त प्रावस्थाकोण अनुमापन (Phase angle titration) विधि के भी उपयोगी सम्प्रयोग हुए हैं।

राष्ट्रीय रासायनिक अनुसन्धानशाला, पूना : विद्युत वैश्लेषिक अनुसंधानों में उत्प्रेरित अपचयन के प्रयोग उल्लेखनीय हैं।

भारतीय विश्वविद्यालयों में अनुसंधान

विश्वविद्यालयों तथा अनेक स्नातकोत्तर विद्यालयों में विद्युत वैश्लेषिक रसायन की शिक्षा की व्यवस्था है और अनेक स्थानों पर अनुसन्धान भी किये जाते हैं। यह संतोष का विषय है क्योंकि रसायन के समस्त विद्यार्थियों को इसके विद्युत वैश्लेषिक रसायन के उपयोगों से परिचित होना ही चाहिए। जिन विश्वविद्यालयों में उल्लेखनीय कार्य हो रहे हैं, वे निम्न प्रकार है :—

आगरा : पोलैरोग्राफी तथा वोल्टधारामिति पर आगरा कालेज में उल्लेखनीय कार्य हो रहा है। पोलैरोग्राफी उच्चिष्ठ पर केशिका-क्रियाशील पदार्थों के प्रभाव तथा इलेक्ट्रोड ज्यामिति और विसरण धारा में जो संबंध है उस पर अनुसंधान किए गए हैं।

अलीगढ़ मुस्लिम विश्वविद्यालय : यहां पर कार्बनिक यौगिकों (विशेष कर थायोल तथा डाइसल्फाइड यौगिकों) पर पोलैरोग्राफीय अनुसंधान हुए हैं।

इलाहाबाद विश्वविद्यालय : यहाँ कार्बनिक तथा अकार्बनिक यौगिकों पर अनेक वर्षों से पोलैरोग्राफीय अनुसन्धान होते चले आ रहे हैं। पदार्थों की पहचान के लिए इस विधि का उपयोग भी हुआ है। उदाहरणार्थ, Ce (IV) तथा थायोसल्फेट आयन की अभिक्रिया द्वारा बने पदार्थों की पहचान

पोलैरोग्राफीय विधि द्वारा संभव हुई ।[1] इसके अतिरिक्त अनेक जटिल यौगिकों के पोलैरोग्राफीय, विभवमितीय तथा कूलॉमितीय अध्ययन किये जा रहे हैं ।

बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय : ऐम्पियरोमिति विधि द्वारा मिश्रण में उपस्थित आयनों का निर्धारण यहां के अनुसंधानों की विशेषता रही है । इनमें अनेक नये यौगिकों का उपयोग किया गया है ।

पिलानी : ए० सी० पोलैरोग्राफी द्वारा अनेक कार्बनिक एवं जटिल यौगिकों पर अनुसन्धान हुए हैं ।

दिल्ली विश्वविद्यालय : पोलैरोग्राफीय विधि द्वारा प्रकाश-रासायनिक अभि- क्रियाओं से निर्मित यौगिकों की पहचान संभव हो सकी है । ऐम्पियरोमिति तथा उच्च आवृति परिमापन विधियों द्वारा धातुओं के निश्चयन विधि का मानकीकरण भी किया गया है । इसके अतिरिक्त ठोस इलेक्ट्रोडों द्वारा पिघले लवण पर महत्वपूर्ण अनुसंधान किए गए हैं ।

जादवपुर : मिश्रित तथा अजलीय विलायकों में किए गए अनुसंधान यहां की विशिष्टता हैं जिनके द्वारा सोडियम, पोटैसियम तथा लीथियम मिश्रण में पोटैसियम की मात्रा का निर्धारण संभव हो सका है ।

जोधपुर विश्वविद्यालय : लगभग दस वर्षों से यहाँ पर विद्युत वैश्लेषिक रसायनपर महत्वपूर्ण अनुसंधान हो रहे हैं । नाइट्रो यौगिकों पर पोलैरोग्राफीय अनुसंधानों से अनेक अन्तर्वर्ती उत्पादों तथा मुक्त मूलकों की उपस्थिति के संकेत प्राप्त हुए हैं । कुछ अनुत्क्रमणीय प्रक्रमों की जाँच करने से महत्वपूर्ण वेग नियतांकों तथा वेग निर्धारक चरणों का ज्ञान हुआ है । इनके अतिरिक्त घूर्णी प्लेटिनम इलेक्ट्रोड द्वारा वोल्टधारामिति के फलस्वरूप Fe (II), Fe (III),[2] Tl (I) तथा Tl (III) के आचरणों पर प्रकाश पड़ा है । प्लैटिनम इलेक्ट्रोड की रचना का वैद्युत-रासायनिक अभिक्रियाओं पर महत्वपूर्ण प्रभाव पड़ता है । यह एक आश्चर्यजनक खोज है कि अनेक अभिक्रियाओं का रूप इलेक्ट्रोड रचना पर निर्भर करता है । कभी-कभी रचना बदलने से उत्क्रमणीय निकाय अनुत्क्रमणीय निकाय में परिणत हो जाता है । यह ध्यान देने योग्य बात है कि बिन्दुपाती पारद इलेक्ट्रोड द्वारा इन निकायों की परीक्षा कर सकना संभव नहीं है ।

अभी तक जटिल यौगिकों से सम्बन्धित पोलैरोग्राफीय अनुसन्धान केवल बिन्दुपाती पारद इलेक्ट्रोड तक ही सीमित थे । इन अनुसन्धानों से यह सिद्ध हो गया है कि प्लैटिनम इलेक्ट्रोड द्वारा जटिल यौगिकों की जाँच संभव है ।[3] यौगिकों की संरचना तथा उनके स्थायित्व की परीक्षा प्लैटिनम इलेक्ट्रोड द्वारा संभव है ।

प्रबल आक्सीकारक प्रवृत्ति के कारण सीरियम (IV) का पोलैरोग्राफीय अन्वेषण कठिन है परन्तु उसके जटिल यौगिकों के गुणधर्मों का अध्ययन पोलैरोग्राफीय विधि द्वारा संभव हो सका है । विभवमापी विधि द्वारा भी इनके गुणों के विश्लेषण किए गए हैं ।

राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर : धातुओं की न्यूनतम मात्राओं का निर्धारण पोलैरोग्राफीय तथा ऐम्पियरोमापी विधियों द्वारा किया गया है । सरल तथा जटिल आयनों के जलीय तथा अजलीय विलयनों की परीक्षा भी की गई हैं ।[4]

रुड़की विश्वविद्यालय : यहाँ पर पोलैरोग्राफीय तथा विभवमापी विधियों द्वारा अनेक धातुओं का निश्चयन संभव हो सका है। मृत्तिकाखनिजों के गुणधर्मों के परीक्षण के लिए विद्युत वैश्लेषिक विधियों का सफलतापूर्वक उपयोग हुआ है।

यद्यपि अनेक स्थानों के सम्बन्ध में मेरी जानकारी अपूर्ण है, किन्तु इतना निश्चित है कि भारतवर्ष में विद्युत वैश्लेषिक रसायन पर संतोषजनक कार्य हो रहा है। यद्यपि इन अनुसन्धानों का सम्प्रयोग उद्योगों में हो रहा है परन्तु इसमें सन्देह नहीं कि निकट भविष्य में समस्त रासायनिक एवं औद्योगिक प्रयोगशालाओं की विद्युत वैश्लेषिक विधियाँ आवश्यक अंग बन जायेंगी।

निर्देश

1. अग्रवाल तथा कपूर। J. Praktische Chemie, 1963, **20**, 81
2. कपूर तथा जैलवाल। Microchemical Journal, 1971, **16**, 507
3. वही। Microchemical Journal, 1971, **16**, 501
4. कपूर तथा अग्रवाल। Indian J. Chem., 1972, **10**, 551

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 1, January, 1973, Pages 7-11

कतिपय निश्चित समाकल

एम० एस० समर
गणित विभाग, रीजनल कालेज ऑफ एजुकेशन, अजमेर

[प्राप्त—जनवरी 16, 1971]

सारांश

इस शोध पत्र का उद्देश्य ऐपेल फलन F_4, लारिसेला फलन F_C तथा F_D तथा तीन चरों के एक नव परिभाषित फलन, H_2 वाले कुछ निश्चित समाकलों का मान ज्ञात करना है।

Abstract

Some definite integrals. *By* M. S. Samar, Department of Mathematics, Regional College of Education, Ajmer.

The object of this paper is to evaluate some definite integrals involving Appell's Function F_4, Lauricella's Function F_C and F_D, and H_2, a newly defined function of three variables.

1. उपपत्ति के लिये निम्नांकित परिणामों की आवश्यकता होगी :

[(6), pp, 284 (2)], [(2)], [(1)], [(7), pp, 19-31 (13, 14, 17, 18)].

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\sigma}(1+x)^{\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, dx$$

$$=\frac{2^{\beta+\sigma+1}\Gamma(\sigma+1)\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha-\sigma+n)}{(n)!\,\Gamma(\beta+\sigma+n+2)\,\Gamma(\alpha-\sigma)},$$

$$Re\,\sigma>-1,\quad Re\,\beta>-1. \tag{1·1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\gamma)_n(\delta)_n}{(1+\alpha)_n(1+\beta)_n} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, t^n$$

$$=F_4[\gamma, \delta; 1+\alpha, 1+\beta; \tfrac{1}{2}t(x-1), \tfrac{1}{2}t(x+1)] \tag{1·2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(P)_n}{(\delta)_n} P_n^{(\alpha-n, \beta-n)}(x)\, t^n$$

$$=F_1[\rho, -\alpha, -\beta; \delta; \tfrac{1}{2}(x-1)t, \tfrac{1}{2}(x+1)t]. \qquad (1\cdot3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+n)!\,(1+\alpha+\beta)_{m+n}}{(1+\gamma)_n\,(1+\delta)_n} P_{m+n}^{(\alpha-n, \beta-n)}(x)\, P_n^{(\gamma, \delta)}(y)\, t^n$$

$$=H_2\Big[-\alpha; 1+\alpha+\beta+m; 1+\alpha+m, -\beta-m; 1+\delta, 1+\gamma;$$

$$-\frac{(x+1)(1+y)}{4}t, \frac{(1+x)(1-y)}{4}t, \frac{x-1}{2}\Big], \qquad (1\cdot4)$$

जहाँ $H_2\Big[-\alpha; 1+\alpha+\beta+m; 1+\alpha+m, -\beta-m; 1+\delta, 1+\gamma;$

$$-\frac{(1+x)(1+y)}{4}t, \frac{(1+x)(1+y)}{4}t, \frac{(x-1)}{2}\Big]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_{n+s-t}(1+\alpha+\beta+m)_{n+s}(-\beta-m)_t(1+\alpha+m)_t}{(1+\delta)_n(1+y)_s(n)!\,(s)!\,(t)!}$$

$$\times\left[\frac{-(1+x)(1+y)}{4}t\right]^n\left[\frac{(1+x)(1-y)}{4}t\right]^s\left[\frac{x-1}{2}\right]^t.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+n)!\,(1+\alpha+\beta)_{m+n}}{(n)!\,(1+\delta)_n} P_{n+m}^{(\alpha-n, \beta-n)}(x)\, t^n=(1+\alpha)_m$$

$$\times(1+\alpha+\beta)_m\left[\frac{2}{1+x}\right]^\beta H_2\Big[-\alpha, 1+\alpha+\beta+m; 1+\alpha+m; 1+\delta; -\frac{1+x}{2}t, \frac{x-1}{2}\Big]. \qquad (1\cdot5)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha-n, \beta-n)}(x)\, P_m^{(\delta+n, \gamma)}(y)\, t^n=\left(\frac{2}{1+y}\right)^\gamma \frac{1}{(m)!}$$

$$\times F_D\Big[1+\delta+m; -\alpha, -\beta, -\gamma-m; \delta+1; \tfrac{1}{2}t(x-1), \tfrac{1}{2}t(x+1), \frac{1-y}{2}\Big]. \qquad (1\cdot6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n\,(\delta)_n}{(1+\alpha)_n(1+\beta)_n} P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\, F_4\Big[\gamma+n, \delta+n; \rho_1, \rho_2; y, z\Big]\, t^n$$

$$=F_C[\gamma, \delta; \rho_1, \rho_2, 1+\alpha, 1+\beta, y, z, \tfrac{1}{2}t(x-1), \tfrac{1}{2}t(x+1)]. \qquad (1\cdot7)$$

2. जिन परिणामों की स्थापना की जानी है, वे हैं :

$$I_1 = \int_{-1}^{1} (1-x)^{\sigma} (1+x)^{\beta} F_4 [\gamma, \delta; 1+\alpha, 1+\beta; \tfrac{1}{2}t(x-1), \tfrac{1}{2}t(x+1)]\, dx \quad (2\cdot1)$$

$$= \frac{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1+\sigma)\, 2^{\beta+\sigma+1}}{\Gamma(\beta+\sigma+2)} \, {}_3F_2\left[\gamma, \delta, \alpha-\sigma; 1+\alpha, \beta+\sigma+2; t\right],$$

यदि $R(\sigma+1)>0$, $R(\beta+1)>0$.

$$I_2 = \int_{-1}^{1} (1-x)^{\sigma}(1+x)^{\beta} F_C [\gamma, \delta; \rho_1, \rho_2, 1+\alpha, 1+\beta; y, z, \tfrac{1}{2}t(x-1), \tfrac{1}{2}t(x+1)\Big] \quad (2\cdot2)$$

$$dx = \frac{2^{\beta+\sigma+1}\Gamma(\beta+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\beta+\sigma+2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n(\delta)_n(\alpha-\sigma)}{(1+\alpha)_n(\beta+\sigma+2)_n}$$

$$\times F_4 \left[\gamma+n, \delta+n; \rho_1, \rho_2; y, z\right] \frac{t^n}{(n)!},$$

यदि $R(\sigma+1)>0$, $R(\beta+1)>0$.

$$I_3 = \int_{-1}^{1} (1-y)^{\sigma}(1+y)^{\gamma-2\sigma-2} H_2 \Big[-\alpha; 1+\alpha+\beta+m;$$

$$1+\alpha+m, -\beta-m; \gamma-2\sigma-1, 1+\gamma;$$

$$-\frac{(x+1)(1+y)}{4}\, t, \frac{(x+1)(1-y)}{4}\, t, \frac{x-1}{2}\Big]\, dy$$

$$= \frac{2^{\gamma-\sigma-1}\Gamma(\sigma+1)\Gamma(\gamma-2\sigma-1)}{\Gamma(\gamma-\sigma)} H_2 \Big[-\alpha, 1+\alpha+\beta+m, 1+\alpha+m;$$

$$1+\gamma; -\frac{1+x}{2}\, t, \frac{x-1}{2}\Big], \quad (2\cdot3)$$

यदि $R\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)>R(\sigma+1)>0$,

$$I_4 = \int_{-1}^{1} (1-y)^{\alpha} F_D \left[1+\delta+m; -\alpha, -\beta, -\gamma-m; \delta+1; \tfrac{1}{2}t(x-1), \tfrac{1}{2}t(x+1), \frac{1-y}{2}\right] dy$$

$$= \frac{2^{\sigma+1}\Gamma(\sigma+1)\Gamma(\gamma+m+1)\Gamma(\delta+m-\sigma)}{\Gamma(\sigma+\gamma+m+2)\Gamma(\delta-\sigma)}$$

$$\times F_1 [\delta-\sigma+m, -\alpha, -\beta; \delta-\sigma; \tfrac{1}{2}(x-1)t, \tfrac{1}{2}(x+1)t]. \quad (2\cdot4)$$

2. जिन परिणामों की स्थापना की जानी है, वे हैं :

$$I_1=\int_{-1}^{1}(1-x)^{\sigma}(1+x)^{\beta}F_4[\gamma,\delta;1+\alpha,1+\beta;\tfrac{1}{2}t(x-1),\tfrac{1}{2}t(x+1)]\,dx \quad (2\cdot1)$$

$$=\frac{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1+\sigma)2^{\beta+\sigma+1}}{\Gamma(\beta+\sigma+2)}\,{}_3F_2\left[\gamma,\delta,\alpha-\sigma;1+\alpha,\beta+\sigma+2;t\right],$$

यदि $R(\sigma+1)>0$, $R(\beta+1)>0$.

$$I_2=\int_{-1}^{1}(1-x)^{\sigma}(1+x)^{\beta}F_C[\gamma,\delta;\rho_1,\rho_2,1+\alpha,1+\beta;y,z,\tfrac{1}{2}t(x-1),\tfrac{1}{2}t(x+1)\Big] \quad (2\cdot2)$$

$$dx=\frac{2^{\beta+\sigma+1}\Gamma(\beta+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\beta+\sigma+2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_n(\delta)_n(\alpha-\sigma)}{(1+\alpha)_n(\beta+\sigma+2)_n}$$

$$\times F_4\Big[\gamma+n,\delta+n;\rho_1,\rho_2;y,z\Big]\frac{t^n}{(n)!},$$

यदि $R(\sigma+1)>0$, $R(\beta+1)>0$.

$$I_3=\int_{-1}^{1}(1-y)^{\sigma}(1+y)^{\gamma-2\sigma-2}H_2\Big[-\alpha;1+\alpha+\beta+m;$$

$$1+\alpha+m,-\beta-m;\gamma-2\sigma-1,1+\gamma;$$

$$-\frac{(x+1)(1+y)}{4}t,\frac{(x+1)(1-y)}{4}t,\frac{x-1}{2}\Big]dy$$

$$=\frac{2^{\gamma-\sigma-1}\Gamma(\sigma+1)\Gamma(\gamma-2\sigma-1)}{\Gamma(\gamma-\sigma)}H_2\Big[-\alpha,1+\alpha+\beta+m,1+\alpha+m;$$

$$1+\gamma;-\frac{1+x}{2}t,\frac{x-1}{2}\Big], \quad (2\cdot3)$$

यदि $R\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)>R(\sigma+1)>0$,

$$I_4=\int_{-1}^{1}(1-y)^{\alpha}F_D\Big[1+\delta+m;-\alpha,-\beta,-\gamma-m;\delta+1;\tfrac{1}{2}t(x-1),\tfrac{1}{2}t(x+1),\frac{1-y}{2}\Big]dy$$

$$=\frac{2^{\sigma+1}\Gamma(\sigma+1)\Gamma(\gamma+m+1)\Gamma(\delta+m-\sigma)}{\Gamma(\sigma+\gamma+m+2)\Gamma(\delta-\sigma)}$$

$$\times F_1[\delta-\sigma+m,-\alpha,-\beta;\delta-\sigma;\tfrac{1}{2}(x-1)t,\tfrac{1}{2}(x+1)t]. \quad (2\cdot4)$$

यदि $Re\,(\sigma+1)>0,\ R(\gamma+1)>0.$

3. (2·1) की उपपत्ति

(1·2) में दोनों ओर $(1-x)^{\sigma}(1+x)^{\beta}$ से गुणा करके फिर दोनों ओर x के प्रति -1 से 1 तक समाकलित करते हैं। बाईं ओर के समाकलन तथा संकलन के क्रम को परस्पर बदल देने पर तथा (1·1) की सहायता से x समाकल का मान निकालने पर हमें (2·1) की प्राप्ति होगी।

ब्रामविच [3, pp 500] का उपयोग करते हुये संकलन तथा समाकलन के क्रम में परिवर्तन विहित है क्योंकि परिणाम में उल्लिखित प्रतिबन्धों के लिये यह श्रेणी बाईं ओर समान रूप से अभिसारी है।

इसी प्रकार परिणाम (2·2) भी (1·7) तथा (1·1) से प्राप्त किया जा सकता है। (2·3) प्राप्त करने के लिये (1·4) में δ के स्थान पर $\gamma-2\sigma-2$ रखा जाता है और दोनों ओर $(1-y)^{\sigma}$ $(1+y)^{\gamma-2\sigma-2}$ से गुणा करके y के प्रति -1 से 1 तक समाकलित करते हुये वही विधि अपनाई जाती है और (1·2) तथा (1·5) का उपयोग किया जाता है। (2·4) की प्राप्ति के लिये (1·6) में दोनों ओर $(1-y)^{\sigma}(1+y)^{\gamma}$ से गुणा करके y के प्रति -1 से 1 तक समाकलित करते हुये वही विधि अपनाई जाती है और (1·1) तथा (1·3) का उपयोग किया जाता है।

4. विशिष्ट दशा

यदि $\gamma=\delta=1,\ a=\beta=0,\ \sigma=-\frac{1}{2}$ तो (1·2) तथा [(5), pp 183 (49)] का उपयोग करने पर (2·1) एक ज्ञात परिणाम [(4), pp 102 (16)] में परिणत हो जाता है। (4·1)

$t=0$ होने पर (2·1) एक ज्ञात परिणाम में परिणत हो जाता है। (4·2)

$\Upsilon=z=0$, होने पर (2·2) परिणत होकर (2·1) हो जाता है। (4·3)

कृतज्ञता-ज्ञापन

मैं डा० सी० बी० राठी तथा डा० के० एस० सेवरिया का कृतज्ञ हूँ जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में मेरी सभी प्रकार से सहायता पहुँचाई।

निर्देश

1. अल-सलाम, डब्लू० ए०। **ड्यूक जर्नल**, 1964, V **31**, 127-142
2. ब्रैकमैन, एफ०। **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**
3. ब्रामविच, टी० जे० आई० ए०। An Introduction to the Theory of Infinite Series, **मैकमिलन,** 1955.

4. एर्डेल्यी, ए० । Higher Transcendental Functions. भाग I, 1953.

. वही । वही, भाग II, 1953.

6. वही । Tables of Integral Transforms. भाग II, 1954.

7. शर्मा, बी० एल० तथा जैन, पी० सी० । Istituto Editoriale Del Mezzogiorno Laricerca Anno, 1970, n. 1.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 1, January, 1973, Pages 13-16

हैंकेल परिवर्त सम्बन्धी एक प्रमेय

आर० एस० जौहरी
गणित विभाग, शासकीय महाविद्यालय, कोटा

[प्राप्त—अक्टूबर 15, 1971]

सारांश

इस शोधपत्र का उद्देश्य क्रियात्मक कलन का उपयोग करते हुये हाइपरज्यामितीय फलन तथा ऐपेल फलन F_4 वाले अनन्त समाकल का मान ज्ञात करना है।

Abstract

A theorem on Hankel transform. *By* R. S. Johari, Department of Mathematics, Govt. College, Kota.

The object of this paper is to evaluate an infinite integral involving hypergeometric function and Appel's function F_4 by making use of operational calculus.

1. किसी फलन $f(t)$ का हैंकेल परिवर्त

$$\phi(p)=\int_0^\infty (pt)^{1/2}\, \mathcal{J}_\nu(pt)\, f(t)\; dt \qquad (p>0) \qquad (1\cdot1)$$

समीकरण द्वारा प्रस्तुत किया जाता है जिसे हम सांकेतिक रूप में

$$\phi(p)=\underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} f(t)$$ द्वारा व्यक्त करेंगे।

2. **प्रमेय :** यदि

$$\phi(p)=\underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} t^{\lambda} f(t)$$

तथा

$$\psi(p)=\underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}} t^{\sigma-2}\, k_\rho(\beta t)\; \phi(t) \quad .$$

तो

$$\psi(p)=\frac{p^{\mu+1/2}\,\Gamma\frac{\sigma+\mu+\nu-\rho}{2}\;\Gamma\frac{\sigma+\mu+\nu+\rho}{2}}{2^{2-\sigma}\,\beta^{\sigma+\mu+\nu}\,\Gamma\mu+1\;\Gamma\nu+1}$$

$$\times\int_0^\infty x^{\nu+\lambda+1/2}F_4\left(\frac{\sigma+\mu+\nu-\rho}{2},\;\frac{\sigma+\mu+\nu+\rho}{2};\right.$$

$$\left.\mu+1,\;\nu+1;-\frac{p^2}{\beta^2},\;-\frac{x^2}{\beta^2}\right)\times f(x)\,dx \qquad (1\cdot2)$$

यदि $R(\sigma+\mu+\nu)>|R(\rho)|$, $R(\beta)>0$, तथा (1·2) में निहित समाकल पूर्णरूपेण अभिसारी होगा।

उपपत्ति :

हमें ज्ञात है कि

$$\phi(p)\underset{\nu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}t^{\lambda}f(t) \qquad (1\cdot3)$$

तथा

$$\psi(p)\underset{\mu}{\overset{\mathcal{J}}{=}}t^{\sigma-2}\,k_\rho(\beta t)\;\phi(t) \qquad (1\cdot4)$$

अतः

$$\psi(p)=\int_0^\infty (pt)^{1/2}\,\mathcal{J}_\mu(pt)\;t^{\sigma-2}\,k_\rho(\beta t)\;\phi(t)$$

$$=\int_0^\infty (pt)^{1/2}\,\mathcal{J}_\mu(pt)\;t^{\sigma-2}\,k_\rho(\beta t)dt\int_0^\infty x^{\lambda}(tx)^{1/2}\,\mathcal{J}_\nu(tx)\,f(x)dx$$

समाकलन का क्रम बदल देने पर हमें [1, p. 373(8)]

$$\psi(p)=p^{1/2}\int_0^\infty x^{\lambda+1/2}f(x)\;dx\int_0^\infty t^{\sigma-1}\,\mathcal{J}_\mu(pt)\;\mathcal{J}_\nu(xt)\;k_\rho(\beta t)\;dt$$

$$=\frac{p^{\mu+1/2}\,\Gamma\frac{\sigma+\mu+\nu-\rho}{2}\;\Gamma\frac{\sigma+\mu+\nu+\rho}{2}}{2^{2-\sigma}\,\beta^{\sigma+\mu+\nu}\,\Gamma\mu+1\;\;\Gamma\nu+1}$$

$$\times\int_0^\infty x^{\nu+\lambda+1/2}F_4\left(\frac{\sigma+\mu+\nu-\rho}{2},\frac{\sigma+\mu+\nu+\rho}{2};\;\mu+1;\;\nu+1;\;-\frac{p^2}{\beta^2},-\frac{x^2}{\beta^2}\right)\times f(x)\;dx \qquad (1\cdot5)$$

प्राप्त होगा।

यदि $R(\sigma+\mu+\nu)>|R(\rho)|$, $R(\beta)>0$, $p>0$, तथा उपर्युक्त में निहित समाकल पूर्णरूपेण अभिसारी हो।

समाकलन के क्रम परिवर्तन को सहज ही वैध माना जा सकता है क्योंकि (1·3) तथा (1·4) हैंकेल परिवर्तों की विद्यमानता के कारण परम अभिसारी हैं।

सम्प्रयोग

[1, p. 81(3)] पर विचार करने पर

$$f(t)=t^{\nu-\lambda+1/2}\,{}_2F_1\left(\frac{\mu-\sigma+\rho+\nu+4}{2},\ \frac{\mu-\sigma-\rho+\nu+4}{2};\ \nu+1;\ -a^2t^2\right)$$

हमें निम्नांकित फल प्राप्त होगा :

$$t^{\lambda} f(t)=t^{\nu+1/2}{}_2F_1\left(\frac{\mu-\sigma+\rho+\nu+4}{2}\ \ \frac{\mu-\alpha-\rho+\nu+4}{2};\ \nu+1;\ -a^2t^2\right)$$

$$\underset{\nu}{\mathcal{J}}\ \frac{2^{\sigma-\mu-2}\,\Gamma\nu+1}{a^{\mu-\sigma+\nu+4}\ \Gamma\dfrac{\mu-\sigma+\rho+\nu+4}{2}\ \Gamma\dfrac{\mu-\sigma-\rho+\nu+4}{2}}\times p^{\mu-\sigma+5/2}\,k_{\rho}\left(\frac{p}{a}\right)$$

$$=\phi(p),\ -1<R(\nu)<2max\left[R\left(\frac{\mu-\sigma+\rho+\nu+4}{2}\right), R\left(\frac{\mu-\sigma-\rho+\nu+4}{2}\right)\right]-\frac{3}{2},$$
$$R(a)>0.$$

अब
$$t^{\sigma-2}\,k_{\rho}(\beta t)\ \phi(t)=\frac{2^{\sigma-\mu-2}\ \Gamma\nu+1\ t^{\mu+1/2}}{a^{\mu-\sigma+\nu+4}\ \Gamma\dfrac{\mu-a+\rho+\nu+4}{2}\ \ \Gamma\dfrac{\mu-\sigma-\rho+\nu+4}{2}}\times k_{\rho}\left(\frac{t}{a}\right)k_{\rho}(\beta t)$$

$$\underset{\mu}{\mathcal{J}}\ \frac{2^{\sigma-\mu-7/2}\ \Gamma\nu+1\ \Gamma\pi^{1/2}p^{\mu+1/2}\ \Gamma\mu+\rho+1\ \Gamma\mu-\rho+1\ P_{\rho-1/2}^{-\mu-1/2}(u)}{a^{\nu-\alpha+3}\,\beta^{\mu+1}\ \Gamma\dfrac{\mu-\sigma+\rho+\nu+4}{2}\Gamma\dfrac{\mu-\sigma-\rho+\nu+4}{2}(4^2-1)^{\mu/2+1/4}}$$

जहाँ
$$u=\frac{a^2p^2+a^2\beta^2+1}{2a\beta},\ R\left(\frac{1}{a}\right)>0,\ R(\beta)>0,$$
$$R(\mu\pm\rho)>-1,\ \ R(\nu)>-1 \qquad [1, p. 67, 30]$$

$$=\psi(p)$$

प्रमेय का सम्प्रयोग करने पर

$$\int_0^{\infty} x^{2\nu+1}\,F_4\left(\frac{\sigma+\mu+\nu-\rho}{2},\ \frac{\sigma+\mu+\nu+\rho}{2};\ \mu+1,\ \nu+1;-\frac{p^2}{\beta^2},\ -\frac{x^2}{\beta^2}\right)$$
$$\times{}_2F_1\left(\frac{\mu-\sigma+\rho+\nu+4}{2},\ \frac{\mu-\sigma-\rho-\nu+4}{2};\ \nu+1;-a^2x^2\right)dx$$

$$= \frac{\pi^{1/2}\, \beta^{\sigma+\nu-1}\, \Gamma\mu+1\, (\Gamma\nu+1)^2\, \Gamma\mu+\rho+1\, \Gamma\mu-\rho+1\, (u^2-1)^{-\mu/2-1/4}}{2^{\mu+3/2}\, \alpha^{\nu-\sigma+3}\, \Gamma\frac{\mu-\sigma+\rho+\nu+4}{2}\, \Gamma\frac{\mu-\sigma-\rho+\nu+4}{2}\, \Gamma\frac{\sigma+\mu+\nu-\rho}{2}\, \Gamma\frac{\sigma+\mu+\nu+\rho}{2}} \times P^{-\mu-1/2}_{\rho-1/2}(u)$$

जहाँ $u = \frac{\alpha^2 p^2 + \alpha^2 \beta^2 + 1}{2\alpha\beta}$,

उपर्युक्त समाकल $R(\nu+1)>0$, $R(\beta)>0$, $R(\mu+1)>0$, $R(\mu+\rho+1)>0$, $p>0$, $R(\sigma+\mu+\nu)>|R(\rho)|$, $R(\alpha)>0$, $R(\mu\pm\rho)>-1$, तथा

$$R(\nu)<2\ max\left[R\left(\frac{\mu-\sigma+\rho+\nu+4)}{2}\right), R\left(\frac{\mu-\sigma-\rho+\nu+4}{2}\right)\right]-\frac{3}{2} \qquad (1\cdot6)$$

के लिये विहित है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

मैं राजकीय विद्यालय, अजमेर के डा० डी० सी० गुखरू का कृतज्ञ हूँ जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में रुचि ली है ।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० । Tables of Integral Transforms. भाग II, मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1954.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 1, January, 1973, Pages 17-20

सर्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों वाले कुछ सान्त समाकल

एस० एन० दुबे
शासकीय महाविद्यालय, चित्तौड़

[प्राप्त—मई 22, 1971]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी का उद्देश्य हरीशंकर द्वारा स्थापित प्रमेय की सहायता से दो सान्त समाकलों का मान ज्ञात करना है जिनमें लारिसेला का हाइपरज्यामितीय फलन, F_A तथा संगमी हाइपरज्यामितीय फलन ψ_2 निहित हैं।

Abstract

On some finite integrals involving generalised hypergeometric functions. *By* S. N. Dube, Government College, Chittor.

The object of this note is to evaluate two finite integrals involving Lauricella's hypergeometric functions, F_A and confluent hypergeometric functions ψ_2, with the help of a theorem, enunciated by H. Shankar.

1. विषय प्रवेश

लैप्लास समाकल
$$\phi(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}\,.\,h(t)\,dt. \tag{1·1}$$

को व्यक्त करने के लिए संकेत $\phi(p)\doteq h(t)$ का उपयोग किया जायेगा यदि समाकल अभिसारी हो तथा $R(p)>0$. हरी शंकर [2, p. 44] ने जिस प्रमेय को स्थापित किया है वह निम्न प्रकार है :

यदि
$$f_1(p)\doteq h_1(t) \text{ तथा } f_2(p)\doteq h_2(t),$$

तो
$$\int_0^{\pi/2} F(p_1 \cos^2\theta, \sin^2\theta)\sin 2\theta\, d\theta=p^{-1}\,.\,f_1(p)\,.\,f_2(p) \tag{1·2}$$

जहाँ
$$F(p_1 x_1 y)\doteq t\,.\,h_1(xt)\,.\,h_2(yt).$$

2. यहाँ जिन प्रमुख परिणामों को सिद्ध करना है वे निम्नांकित प्रकार हैं :—

$$\int_0^{\pi/2} (\cos^2\theta)^{2\nu} \cdot (\sin^2\theta)^{\mu+\nu i} \cdot (p+i\cos^2\theta \cdot d+i\sin^2\theta)\Sigma a_i)^{-1-2\nu-\Sigma\nu i}$$

$$\times F_A(1+\mu+2\nu+\Sigma\nu i;\ \nu+1/2,\ \nu_1+1/2,\ \ldots\ \nu_n+1/2;\ 2\nu+1,\ 2\nu_1+1,\ \ldots\ 2\nu_{n+1};$$

$$\frac{2a\cos^2\theta}{p+i\cos^2\theta a+i\sin^2\theta\Sigma ai}, \ldots \frac{2\sin^2\theta \cdot a_n}{p+i\cos^2\theta \cdot a+i\sin^2\theta\Sigma ai}\Big)\sin 2\theta\, d\theta.$$

$$=\frac{\pi^{-1/2}\cdot 2^{2\nu}\cdot \Gamma\nu+\frac{1}{2}\cdot\Gamma\mu+\Sigma\nu i\cdot\Gamma\nu+1}{\Gamma\mu+2\nu+1+\Sigma\nu_i}\times(p^2+a^2)^{-1/2(2\nu+1)}\times(p+i\Sigma ai)^{-\mu-\Sigma\nu i}$$

$$\times F_A\left(\mu+\Sigma\nu i;\ \nu_{1+1/2},\ \ldots\ \nu_{n+1/2};\ 2\nu_{1+1},\ \ldots\ 2\nu_{n+1};\ \frac{2ia_1}{p+i\Sigma ai}, \ldots \frac{2ia_n}{p+i\Sigma ai}\right) \quad (2\cdot1)$$

तथा

$$\int_0^{\pi/2} (\cos^2\theta)^{\mu+\rho-1}\cdot(\sin^2\theta)^{\nu-1+\Sigma\mu i}\cdot\psi_2(\mu+\nu+\rho+\Sigma\mu i;\ 2\rho+1,\ 2\mu_{1+1},\ \ldots,2\mu_{n+1};$$

$$\frac{a\cos^2\theta}{p}, \frac{a_1\sin^2\theta}{p}, \ldots \frac{a_n\sin^2\theta}{p}\Big)\sin 2\theta\, d\theta=\beta\mu+\rho,\nu+\Sigma\mu i$$

$$\times {}_1F_1\left(\mu+\rho;\ 2\rho+1;\ -\frac{a}{p}\right)\times\psi_2\left(\nu+\Sigma\mu i;\ 2\mu_{1+1},\ \ldots\ 2\mu_{n+1};\ \frac{a_1}{p}, \ldots \frac{a_n}{p}\right) \quad (2\cdot2)$$

(2·1) की उपपत्ति :

संक्रिया युग्मों [1, p. 182, Eq. 7; p. 184, Eq. 24] का उपयोग करने पर

$$h_1(t)=t^\nu\cdot J_\nu(dt)$$
$$\doteq 2^\nu\cdot\pi^{-1/2}\cdot\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})\cdot a^\nu\cdot(p^2+a^2)^{-1/2(2\nu+1)}$$
$$=f_1(p) \quad (2.3)$$

तथा

$$h_2(t)=t^{\mu-1}\cdot\prod_{i=1}^{n}\cdot J_{\nu i}(a_i t)$$

$$\doteq\frac{2^{-\Sigma\nu i}\cdot\Gamma(\mu+\Sigma\nu i)}{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(\nu_{i+1})}+\prod_{i=1}^{n}(a_i)^{\nu i}\times p\times(p+i\Sigma ai)^{-\mu-\Sigma\nu i}$$

$$\times F_A\Big(\mu+\Sigma\nu i;\ \nu_{1+1/2},\ \ldots\ \nu_{n+1/2};\ 2\nu_{1+1/2},\ \ldots\ 2\nu_{n+1/2};\ \frac{2a_{1i}}{p+i\Sigma a_i}, \ldots \frac{2a_{ni}}{p\cdot i\Sigma a_i}\Big)$$
$$=f_2(p) \quad (2\cdot4)$$

यदि $$R(p\pm i\Sigma ai)>0 \text{ तथा } R(\mu+\Sigma\nu_i>0$$

हमें ज्ञात है कि

$$t\,.\,h_1(xt)\,.\,h_2(yt) \doteq \frac{x^{\nu}\,.\,y^{\mu-1}\,.\,2^{-\nu-\Sigma\nu i}\,.\,\Gamma\mu+2\nu+1+\mu\nu i}{\prod_{i=i}^{n}\Gamma(\nu_{i+1})\,.\,\Gamma(\nu+1)}$$

$$\times(ax)^{\nu}\times\prod_{i=1}^{n}(a_i y)^{\nu i}\times p\times(p+iax+i\Sigma ai\,y)^{-1-2\nu-\mu-\Sigma\nu i}$$

$$\times F_A\Big(1+\mu+2\nu+\Sigma\nu i;\ \nu_{+1/2},\ \nu_{1+1/2},\ \ldots\,.\,\nu_{n+1/2};\ 2\nu_{+1},\ 2\nu_{1+1},\ldots 2\nu_{n+1};$$

$$\frac{2ax}{p+iax+i\Sigma aiy},\ \ldots\ \frac{2a_n y}{p+iax+i\Sigma aiy}\Big)$$

$$=F(p_1x_1y) \qquad \ldots \quad (2\cdot5)$$

प्रमेय (1·2) में (2·3), (2·4) तथा (2·5) का उपयोग करने पर परिणाम (2·1) की प्राप्ति होती है।

(2·2) की उपपत्ति :

संक्रिया युग्मों [1 . p. 186 Eq. 35, p. 187, Eq. 43] का उपयोग करने पर

$$h_1(t)=t^{\mu-1},\ \mathcal{J}_{2\rho}(2a^{1/2}\,t^{1/2})$$

$$\doteq \frac{p\Gamma(\mu+\rho)\,.\,a^{\rho}}{\Gamma(2\rho+1)\,.\,p^{\mu+\rho}}\,.\,{}_1F_1\Big(\mu+\rho;\ 2\rho+1;\ -\frac{a}{p}\Big);\ Rep>0$$

$$=f_1(p) \qquad (2\cdot6)$$

तथा

$$h_2(t)=t^{\nu-1}\,.\,\prod_{i=1}^{n}\mathcal{J}_{2\mu i}(2a_i^{1/2}\,t^{1/2});\ M=\prod_{i=1}^{n}\mu_i;\ Re(\mu+M)>0$$

$$\doteq \frac{p\times\Gamma(\nu+M)\,.\,p^{-\nu-M}.\prod_{i=1}^{n}(a_i^{\mu i})}{\prod_{i\,1}^{n}\Gamma(2\mu_i+1)}\times\psi_2\Big(\nu+M;\ 2\mu_1+1,\ \ldots 2\mu_n+1;$$

$$\frac{a_1}{p},\ \ldots\,.\,\frac{a_n}{p}\Big), \text{ जहाँ } Rep>0$$

$$=f_2(p) \qquad (2\cdot7)$$

हमें निम्न परिणाम प्राप्त होगा :

$$t \cdot h_1(xt) \cdot h_2(yt) = t^{\mu+\nu-1} \cdot x^{\mu-1} \cdot y^{\nu-1} \cdot J_{2\rho}(2a^{1/2}\, x^{1/2}\, t^{1/2})$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} J_{2\mu i}(2a_i^{1/2}\, y^{1/2}\, t^{1/2})$$

$$\doteq \frac{p^{1-(\mu+\nu+\rho+M)} \cdot x^{\mu+\rho-1} \cdot y^{\nu-1+M} \cdot a^{\rho} \prod_{i=1}^{n} (a_i^{\mu i})}{\Gamma(2\rho+1) \cdot \prod_{i=1}^{n} \Gamma(2\mu_i+1)} \times \Gamma(\mu+\rho+\nu+M)$$

$$\times \psi_2\left(\mu+\rho+\nu+M; 2\rho+1; 2\mu_{1+1}, \ldots 2\mu_{n+1}; \frac{a}{p}, \frac{a_1 y}{p} \ldots \frac{a_n y}{p}\right) = F(p, x, y) \qquad (2\cdot8)$$

अब (1·2) में दिये गये प्रमेय के उपयोग से हमें परिणाम (2·2) प्राप्त होगा।

विशिष्ट दशा :

$a=0$ रखने पर तथा प्राचलों को समंजित करने पर (2·2) इससे पूर्व कल्ला द्वारा दिये गये परिणाम [3, p. 100] में परिणत हो जाता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

मैं अपने विभाग के श्री० एस० एल० बोरा का ऋणी हूँ जिन्होंने इस टिप्पणी की तैयारी में मेरा मार्ग दर्शन किया है।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० । Tables of Integral Transforms. **भाग I, मैकग्राहिल, न्यूयार्क ।**
2. शंकर, एच० । **जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1948, **23**, 44-49.
3. कल्ला, एस० एल० । **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका**, 1967, **10**, 99-106.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No 1, January 1973, Pages 21-26

H-फलन तथा गाउस के हाइपरज्यामितीय फलन के गुणनफल सम्बन्धी कुछ समाकल

रोशन लाल तक्षक
गणित विभाग, शिक्षा महाविद्यालय, कुरुक्षेत्र

[प्राप्त—नवम्बर 26, 1970]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में H-फलन तथा गाउस के हाइपरज्यामितीय फलन के गुणनफल से सम्बन्धित कुछ समाकलों का मूल्यांकन किया गया है। इस समाकल की उपयोगिता यह है कि प्राचलों के विशिष्टीकरण से समाकलों से G-फलन, मैकराबर्ट का E-फलन, बेसेल, लेगेण्ड्र तथा व्हिटेकर फलनों तथा अन्य सम्बद्ध फलनों के कई फल प्राप्त होते हैं।

Abstract

Some integrals involving product of H-function and Gauss's hypergeometric function *By* R. L. Taxak, Department of Mathematics, College of Education, Kurukshetra (Haryana).

In this paper some integrals involving the product of H-function and Gauss's hypergeometric function have beeen evaluated. The importance of the integral lies due to the fact that on specialising the parameters, the integrals yield many results for G-function, MacRobert's E-function, Bessel, Legendre, Whittaker functions and other related functions.

भूमिका : इस शोधपत्र में हमने फाक्स के H-फलन तथा गाउस की हाइपरज्यामितीय श्रेणी वाले कुछ समाकलों की स्थापना H-फलन को मेलिन-बार्नीज प्रकार के समाकल के रूप मे व्यक्त करते हुये तथा समाकलों के क्रम को विनिमय करते हुये किया है।

फाक्स [5, p. 408] ने H-फलन का सूत्रपात मेलिन-बार्नीज प्रकार के समाकल के रूप में किया जो इस प्रकार है :

$$H^{m,n}_{p,q}\left[z\left|\begin{matrix}(a_p, e_p)\\(b_q, f_q)\end{matrix}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-f_js)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+e_js)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_js)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-e_js)}\cdot z^s\, ds, \qquad (1.1)$$

जहाँ z शून्य के बराबर नहीं है और रिक्त गुणनफल इकाई के रूप में माना जाता है; p, q, m तथा n ऐसे पूर्णांक हैं जिनसे

$1\leqslant m\leqslant q,\ 0\leqslant n\leqslant p$ की तुष्टि होती है। $a_j(j=1, \ldots, p); f_j(j=1, \ldots, q)$

स्थानिक संख्यायें हैं तथा $a_j(j=1, \ldots, p)$; $b_j(j=1, \ldots, q)$ इस प्रकार की सम्मिश्र संख्यायें हैं कि $\Gamma(b_h-f_hs)(h=1, \ldots, m)$ के पोल $\Gamma(1-a_i+e_is)$ $(i=1, \ldots, n)$, के किसी पोल से संपात करते हैं अर्थात्

$$e_i(b_h+\nu)\neq(a_i-\eta-1)\, f_h\ (\nu, \eta=0, 1, \ldots; h=1, \ldots, m; i=1, \ldots, n). \qquad (1\cdot2)$$

इसके भी आगे L $\sigma-i\infty$ से $\sigma+i\infty$ तक इस प्रकार जाता है कि विन्दु

$$s=\frac{b_h+\nu}{f_h}\ (h=1, \ldots, m;\ \nu=0, 1, \ldots\ ), \qquad (1\cdot3)$$

जो $\Gamma(b_h-f_hs)$ $(h=1, \ldots, m)$ के पोल हैं जो L के दाईं ओर हैं और विन्दु

$$s=\frac{a_i-\eta-1}{e_i}\ (i=1,\ldots, n; \eta=0, 1, \ldots), \qquad (1\cdot4)$$

जो L के बाईं ओर हैं $\Gamma(1-a_i+e_is)(i=1, \ldots, n$ के पोल हैं।

हाल ही में ब्राक्स्मा[2] ने H-फलन के उपगामी प्रसार तथा वैश्लेषिक संततता की विवेचना की है।

आगे संक्षेपण की दृष्टि से

$$\sum_{j=1}^{p} e_j-\sum_{j=1}^{q} f_j\equiv A,\ \sum_{j=1}^{n} e_j-\sum_{j=n+1}^{p} e_j+\sum_{j=1}^{m} f_j-\sum_{j=m+1}^{q} f_j\equiv B,$$

(a_p, e_p) द्वारा (a_1, e_1), —, (a_p, e_p) व्यंजित होता है।

उपपत्ति में निम्नांकित सूत्रों की आवश्यकता होगी :

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\rho-1}\, e^{-xz}\, {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)\ dx \qquad (1\cdot5)$$

$$=e^{-z}\Gamma(\gamma)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\rho+r)\Gamma(\gamma+\rho-\alpha-\beta+r)\,z^r}{\Gamma(\gamma+\rho-\alpha+r)\Gamma(\gamma+\rho-\beta+r)r!}\,.$$

$Re(\gamma)>0,\ Re(\rho)>0,\ Re(\gamma+\rho-\alpha-\beta)>0,$ जो [4, p. 400, (8)] का अनुसरण करते हैं।

$$\int_0^1 x^{\rho-1}(1-x)^{\sigma-1}\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;zx)\,dx \tag{1·6}$$

$$=\frac{\{\Gamma(\sigma)\}^2}{\Gamma(\rho+\sigma)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r\Gamma(\rho+r)z^r}{(\gamma)_r\Gamma(\sigma+r)\,r!}\,,$$

$Re(\sigma)>0,\ Re(\rho)>0,\ |\arg(1-z)|<\pi$ जो [4, p. 399, (7)] का अनुसरण करता है।

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\rho-1}(1-zx)^{-\sigma}\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)dx \tag{1·7}$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)(1-z)^{\sigma}}{\Gamma(\sigma)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\rho+r)\Gamma(\sigma+r)\Gamma(\gamma+\rho-\alpha-\beta+r)\,z^r}{\Gamma(\gamma+\rho-\alpha+r)\Gamma(\gamma+\rho-\beta+r)\ r!\ (1-z)^r}\,,$$

$Re(\gamma)>0,\ Re(\rho)>0,\ Re(\gamma+\rho-\alpha-\beta)>0\ \ |\arg(1-z)|<$ जो [4, p. 399, (6)] का अनुसरण करता है।

$$\int_0^{\infty} x^{\gamma-1}(x+z)^{-\sigma}\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;-x)dx \tag{1·8}$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\sigma)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha-\gamma+\sigma+r)\Gamma(\beta-\gamma+\sigma+r)(1-z)^r}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+\sigma+r)\ r!}\,,$$

$Re\,\gamma>0,\ Re(\alpha-\gamma+\sigma)>0,\ Re(\beta-\gamma+\sigma)>0,\ |\arg z|<\pi,$ जो [4, p. 400, (10)] का अनुसरण करता है।

2. पहले हम जिस सूत्र को सिद्ध करेंगे वह है :

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\rho-1}\,e^{-xz}\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)H_{p,q}^{m,n}\left[\zeta(1-x)^{\delta}\Big|\begin{matrix}(a_p,e_p)\\(b_q,f_q)\end{matrix}\right]dx \tag{2·1}$$

$$=\Gamma(\gamma)e^{-z}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{z^r}{r!}\,H_{p+2,q+2}^{m,n+2}\left[\zeta\Big|\begin{matrix}(1-\rho-r,\delta),\ (1+\alpha+\beta-\rho-r,\delta),\ (a_p,e_p);\\(b_q,f_q),\ (1+\alpha-\gamma-\rho-r,\delta),\ (1+\beta-\gamma-\rho-r,\delta)\end{matrix}\right];$$

जहाँ δ एक धनात्मक संख्या है और $A\leqslant 0,\ B>0,\ |\arg\zeta|<B\pi/2,\ \ Re(\gamma)>0,\ Re(\rho+\delta b_j/f_j)>0,$ $Re(\gamma+\rho-\alpha-\beta+\delta b_j/f_j)>0,\ j=1,2,\ldots,m.$

उपपत्ति : इस सूत्र को सिद्ध करने के लिये (1·1) में से (2·1) के बाईं ओर मान रखा जाता है जिससे समाकलनों का क्रम विनिमय हो जाय क्योंकि प्रक्रम में निहित समाकलों के परम अभिसारी होने के कारण विहित है तथा (1·5) का सम्प्रयोग करने पर यह व्यंजक निम्न रूप धारण कर लेगा :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-f_js)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+e_js)\,\zeta^s\,\Gamma(\gamma)\,e^{-z}}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_js)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-e_js)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\rho+\delta s+r)}{\Gamma(\gamma+\rho-\alpha+r+\delta s)}$$

$$\times\frac{\Gamma(\gamma+\rho-\alpha-\beta+r+\delta s)\,z^r}{\Gamma(\gamma+\rho-\beta+r+\delta s)\,r\,!}\,ds.$$

(1·1) के सम्प्रयोग से (2·1) के बाईं ओर का मान प्राप्त होता है ।

3. (1·6) की सहायता से सूत्र (2·1) को

$$\int_0^1 x^{\rho-1}(1-x)^{\sigma-1}\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;zx)\;H_{p,q}^{m,n}\left[\zeta\,\{x(1-x)\}^{\delta}\left|\begin{matrix}(a_p,e_p)\\(b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right]dx \qquad (3\cdot1)$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r\cdot z^r}{(\gamma)_r\,r\,!}\,H_{p+3\delta,q+2\delta}^{m,n+3\delta}\left[\zeta\left|\begin{matrix}(1-\sigma,\delta),(1-\sigma,\delta),(1-\rho-r,\delta),(a_q,e_p)\\(b_q,f_q),(1-\rho-\sigma,2\delta),(1-\sigma-r,\delta)\end{matrix}\right.\right],$$

रूप में परिणत किया जा सकता है जहाँ δ धन संख्या है और $A\leqslant0$, $B>0$, $|\arg\zeta|<B\pi/2$, $Re(\rho+\delta b_j/f_j)>0$, $Re(\sigma+\delta b_j/f_j)>0$, $j=1,2,\ldots,m$ तथा $|\arg(1-z)<\pi$.

4. इसी विधि के सम्प्रयोग से तथा (1·7) के उपयोग से निम्नांकित सूत्र प्राप्त होता है :

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\rho-1}(1-zx)^{-\sigma}\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)\,H_{p,q}^{m,n}\left[\zeta(1-x)^{\delta}\left|\begin{matrix}(a_p,e_p)\\(b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right] \qquad (4\cdot1)$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)(1-z)^{\sigma}}{\Gamma(\sigma)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\sigma+r)z^r}{r\,!(1-z)^r}\,H_{p+2\delta,q+2\delta}^{m,n+2\delta}\left[\zeta\left|\begin{matrix}(1-\rho-r,\delta),(1-\rho+\alpha+\beta-\gamma-r,\delta)\;(a_p,e_p);\\(b_q,f_q),(1+\alpha-\rho-\gamma-r,\delta),\end{matrix}\right.\right],$$

जहाँ δ धन संख्या है तथा $A\leqslant0$, $B>0$, $|\arg\zeta|<B\pi/2$, $Re(\gamma)>0$, $|\arg(1-z)<\pi$, $Re(\rho+\delta b_j/f_j)>0$, $Re(\gamma+\rho-\alpha-\beta+\delta b_j/f_j)>0$, $j=1,2,\ldots,m$.

5. इसी विधि का सम्प्रयोग करते हुये तथा (1·8) के उपयोग से निम्नांकित सूत्र प्राप्त किया जाता है :

$$\int_3^{\infty} x^{\gamma-1}(x+z)^{-\sigma}\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;-x)\;H_{p,q}^{m,n}\left[\zeta(z+x)^{\delta}\left|\begin{matrix}(a_p,e_p)\\(b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right]dx$$

$$=\Gamma(\gamma) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-z)^r}{r!} H^{m+2\delta, n}_{p+2\delta, q+2\delta}\left[\zeta\left|\begin{matrix}(a_p, e_p), (\sigma, \delta), (\alpha+\beta-\gamma+\sigma+r, \delta); \\ (\alpha-\gamma+\sigma+r, \delta), (\beta-\gamma+\sigma+r, \delta), (b_q, f_q)\end{matrix}\right.\right],$$

जहाँ δ धन संख्या है और $A \leqslant 0$, $B>0$, $|\arg \zeta|<B\pi/2$, $Re\ \gamma>0$, $|\arg z|<\pi$ $Re(\sigma-\gamma-\delta a_j/f_j) >-\delta, j=1, \ldots, n$.

(5·1) में $z=1$ रखने पर यह निम्न रूप में परिणत हो जाता है :

$$\int_0^{\infty} x^{\gamma-1}(1+x)^{-\sigma}\ {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; -x)\ H^{m,n}_{p,q}\left[\zeta(1+x)^{\delta}\left|\begin{matrix}(a_p, e_p) \\ (b_q, f_q)\end{matrix}\right.\right]dx$$

$$=\Gamma(\gamma)\ H^{m+2\delta, n}_{+2\delta, q+2\delta}\left[\zeta\left|\begin{matrix}(a_p, e_p), (\sigma, \delta), (\alpha+\beta-\gamma+\sigma, \delta) \\ (\alpha-\gamma+\sigma, \delta), (\beta-\gamma+\sigma, \delta), (b_q, f_q)\end{matrix}\right.\right]. \qquad (5\cdot2)$$

जहाँ δ धन संख्या है और $A \leqslant 0$, $B>0$, $|\arg \zeta|<B\pi/2$, $Re(\gamma)>0$, $Re(\sigma-\gamma-\delta b_j/e_j)>-\delta$, $j=1, 2, \ldots, n$.

विशिष्ट दशायें

(2·1), (3·1) तथा (5·1) में δ को धन पूर्णांक मानने $e_j=f_i=1 (j=1, \ldots, p; i=1, \ldots, q)$ रखने तथा

$$H^{m,n}_{p,q}\left[z\left|\begin{matrix}(a_p, 1) \\ (b_q, 1)\end{matrix}\right.\right]=G^{m,n}_{p,q}\left[z\left|\begin{matrix}a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q\end{matrix}\right.\right],$$

सूत्र का व्यवहार करने और (1·1), [3, p. 4,(11)], [3, p. 207, (1)] की सहायता से सरल करने पर हमें ज्ञात फल [1, p. 1049, (2·1)], [1, p. 1050, (2·6)] तथा [1, p. 1049, (2·2)] प्राप्त होंगे।

ऊपर की ही भाँति (4·1) को G-फलन में परिणत करने पर

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\rho-1}(1-zx)^{-\sigma}\ {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)\quad G^{m,n}_{p,q}\left[\zeta(1-x)^{\delta}\left|\begin{matrix}a_p \\ b_q\end{matrix}\right.\right]dx$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)(1-z)^{\sigma}\ .\ \delta^{-\gamma}}{\Gamma(\sigma)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\sigma+r)z^r}{r!\ (1-z)^r}.$$

$$G^{m, n+2\delta}_{p+2\delta, q+2\delta}\left[\zeta\left|\begin{matrix}\triangle(\delta, 1-\rho-r), \triangle(\delta, 1+\alpha+\beta-\gamma-\rho-r),\ a_p; \\ b_q,\ \triangle(\delta, 1+\alpha-\gamma-\rho+r),\ \triangle(\delta, 1+\beta-\gamma-\rho+r)\end{matrix}\right.\right],$$

जहाँ δ धन पूर्णांक है तथा

$p+q<2(m+n)$, $|\arg \zeta|<[m+n-(p+q)/2]\pi$,

$Re(\gamma)>0$, $|\arg (1-z)|<\pi$, $Re(\rho+\delta b_j)>0$, .

$$Re(\gamma+\rho-\alpha-\beta+\delta b_j)>0, \; j=1, \ldots, m.$$

(3·1) में m, n, p, q के स्थान पर क्रमशः $p, 1, q+1, p$ रखने पर, $z=0$ मानने पर और प्राचलों को

सूत्र
$$H^{p,1}_{q+1,p}\left[z\middle|\begin{matrix}(1, 1), (\beta_q, 1)\\ (\alpha_p, 1)\end{matrix}\right]=\begin{pmatrix}\alpha_p : z\\ \beta_q\end{pmatrix},$$

में सजाने पर हमें ज्ञात फल [6, p. 415, (55)] प्राप्त होगा ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

डा० एस० डी० बाजपेयी ने इस पत्र की तैयारी में मेरा मार्गदर्शन किया है जिसके लिये मैं उनका आभारी हूँ ।

निर्देश

1. बाजपेयी, एस० डी० । **प्रोसी० कैम्ब्रि० फिला० सोसा०**, 1967, **63**, 1049-53.
2. ब्राक्समा, बी० एल० जे० । **काम्प्ट० मैथ०**, 1963, **15**, 239-341.
3. एर्डेल्यी, ए० । Higher Transcendental Functions, **भाग** 1, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1954.
4. वही । Tables of Integral transforms, **भाग** 2, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1954.
5. फाक्स, सी० । **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429.
6. मैकराबर्ट, टी० एम० । Functions of Complex Variables, 1962

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No 1, January, 1973, Pages 27-30

सार्वीकृत फलनों वाले समाकल

शान्ति लाल राकेश
गरिणत विभाग, उदयपुर विश्वविद्यालय, उदयपुर

[प्राप्त—अप्रैल 26, 1972]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य G तथा S फलनों के योगफल वाले समाकल का मान ज्ञात करना है।

Abstract

Integrals involving generalised functions. *By* S. L. Rakesh, Department of Mathematics, University of Udaipur, Udaipur.

The object of this paper is to evaluate an integral involving product of G [7] and S[4] functions.

1. भूमिका : हाल ही में शर्मा[4] ने दो चरों वाले सार्वीकृत S-फलन की परिभाषा दी है। यहाँ विख्यात संकेत $\phi(s)=L[f(t); s]$ का प्रयोग लैप्लास परिवर्त

$$\phi(s)=s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt. \quad R(s)>0 \tag{1·1}$$

की अभिव्यक्ति के लिये किया जावेगा। कपूर[8] ने सार्वीकृत लैप्लास परिवर्त को निम्न रूप में प्रस्तुत किया है :

$$\phi(s)=s\int_0^\infty G_{C,D}^{A,B}\left(st \,\middle/ \begin{matrix}(e_C) \\ (f_D)\end{matrix}\right) f(t)\, dt, \tag{1·2}$$

जहाँ $0 \leqslant A \leqslant D,\ 0 \leqslant B \leqslant C,\ C+D \leqslant 2(A+B)$ तथा $|\arg s| < (A+B-\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}D)\pi$ जिसे हम सांकेतिक रूप में

$$\phi(s)=L_k[f(t); e_{B,C}; f_{A,D}; s]. \tag{1·3}$$

द्वारा व्यक्त करेंगे।

2. हमें निम्नांकित फलों की आवश्यकता पड़ेगी :

(i) गुप्ता [5, p. 198 (12)]

$$L_k\left[G_{q,R}^{H,0}\left(bx \,\middle/\, \begin{matrix}(\alpha_q)\\(\beta_R)\end{matrix}\right) G_{\gamma,\delta}^{\sigma,\beta}\left(cx \,\middle/\, \begin{matrix}(a\gamma)\\(b\delta)\end{matrix}\right); e_{B,C}; f_{A,D}; s\right]$$

$$= \frac{s}{b}\; S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}H, 0\\R-H, q\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}\beta, \alpha\\ \gamma-\beta, \delta-\alpha\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}B, A\\C-B, D-A\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\beta_R+1); (\alpha_q+1)\\ (a_\gamma); (b_\delta)\\ (e_C);\;\; f_D)\end{matrix}\right|\begin{matrix}c/b\\ \\ s/b\end{matrix}\right], \tag{2·1}$$

(ii) गुप्ता तथा जैन[6]

$$L_k\left[\begin{matrix}\sigma-1\\x\end{matrix}\; G_{\eta,\rho}^{\mu,\nu}\left(zx \,\middle/\, \begin{matrix}(g_\eta)\\(h_\rho)\end{matrix}\right); e_{B,C}; f_{A,D};\, s\;\right] \tag{2·2}$$

$$= \frac{s}{z^\sigma}\; G_{C+\rho,\,D+\eta}^{A+\nu,\,B+\mu}\left(\frac{s}{z} \,\middle/\, \begin{matrix}(1-h_\mu-\sigma), (e_C),\; 1-h_{\mu+1}-\sigma,\; \ldots,\; 1-h_\rho-\sigma\\ (1-g_\nu-\sigma), (f_D),\; 1-g_{\nu+1}-\sigma,\; \ldots,\; 1-g_\eta-\sigma\end{matrix}\right),$$

3. समाकल

$$\int_0^\infty x^{\sigma-1}\, G_{\eta,\rho}^{\mu,\nu}\left(zx \,\middle/\, \begin{matrix}(g_\eta)\\(h_\rho)\end{matrix}\right) S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}H, 0\\R-H, q\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}\beta, \alpha\\ \gamma-\beta, \delta-\alpha\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}B, A\\C-B, D-A\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\beta_R+1); (\alpha q+1)\\ (a\gamma); (b\delta)\\ (e_C); (f_D)\end{matrix}\right|\begin{matrix}c/b\\ \\ x/b\end{matrix}\right] dx$$

$$= z^{-\sigma}\; S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}H, 0\\R-H, q\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}\beta, \alpha\\ \gamma-\beta, \delta-\alpha\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\mu+B, \nu+A\\ \rho+C-\mu-B, \eta+D-\nu-A\end{pmatrix}\end{matrix}\right.$$

$$\left|\begin{matrix}(\beta_R+1); (\alpha_q+1)\\ (a_\gamma); (b_\delta)\\ (1-h_\mu-\sigma), (e_C), 1-h_{\mu+1}-\sigma, \ldots,\; 1-h_\rho-\sigma;\\ (1-g_\nu-\sigma), (f_D), 1-g_{\nu+1}-\sigma, \ldots,\; 1-g_\eta-\sigma\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}c/b\\ \\ 1/bz\end{matrix}\right] \tag{3·1}$$

बशर्ते
$$\theta \equiv 2(\mu+\nu)-(\eta+\rho)>0, \ |\arg z|<\tfrac{1}{2}\theta\pi,$$
$$\phi_1 \equiv 2(H+\alpha+\beta)-(q+R+\gamma+\delta)>0, \ |\arg c/b|<\tfrac{1}{2}\phi_1\pi,$$
$$\phi_2 \equiv 2(H+A+B)-(q+R+C+D)>0, \ \left|\arg \frac{1}{b}\right|<\tfrac{1}{2}\phi_2\pi \text{ तथा}$$
$$R(\sigma+1+h_i+f_j+b_k)>0 \ (i=1,\ldots,\mu;\ j=1,\ldots,A;\ k=1,\ldots,\alpha).$$

उपपत्ति :

यदि हम संक्रियात्मक कलन के पार्सेवाल-गोल्डस्टीन प्रमेय में (2.1) तथा (2·2) संक्रियात्मक युग्मों को व्यवहृत करें तो थोड़े से सरलीकरण के फलस्वरूप हमें

$$\cdots G^{\mu,\nu}_{\eta,\rho}\left(zx \,\middle|\, \begin{matrix}(g_\eta)\\(h_\rho)\end{matrix}\right) S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}H, 0\\ R-H, q\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}\beta, \alpha\\ \gamma-\beta, \delta-\alpha\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}B, A\\ C-B, D-A\end{pmatrix}\end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix}(\beta_R+1); (a_q+1)\\ (a_\gamma); (b_\delta)\\ (e_C); (f_D)\end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix}c/b\\ \\ x/b\end{matrix}\right] dx$$

$$= \frac{b}{z^\sigma}\int_0^\infty G^{H,0}_{q,R}\left(bx \,\middle|\, \begin{matrix}(a_q)\\(\beta_R)\end{matrix}\right) G^{\alpha,\beta}_{\gamma,\delta}\left(cx \,\middle|\, \begin{matrix}(a\gamma)\\(b_\delta)\end{matrix}\right)$$
$$\times G^{\nu+A,\mu+B}_{\rho+C,\eta+D}\left(\frac{x}{z} \,\middle|\, \begin{matrix}(1-h_\mu-\sigma), (e_C), 1-h_{\mu+1}-\sigma,\ldots h, 1-h_\rho-\sigma\\ (1-g_\nu-\sigma), (f_D), 1-g_{\nu+1}-\sigma,\ldots, 1-g_\eta-\sigma\end{matrix}\right) dx$$

प्राप्त होगा । समाकल के दाहिनी ओर का मान [5, p. 198 (12)] की सहायता से निकालने पर वांछित फल की प्राप्त होती है ।

विशिष्ट दशायें :

यदि हम (3·1) में $x=x^2$, $\sigma=\frac{\lambda}{2}$, $\mu=2$, $\nu=0$, $\rho=2$, $z=\frac{\alpha^2}{4}$, $\eta=0$, $h_1=\frac{\nu^1}{2}$, $h_2=-\frac{\nu'}{2}$, $H=0$, $\frac{1}{b}=\delta'$ तथा $c\delta'=\beta'$ रखें तथा [2, p. 219 (47)] का प्रयोग करें तो यह शर्मा [9, p. 142 (15)] द्वारा दिये गये समाकल में घटित हो जाता है ।

(ii) यदि $H=R=q=0$, $\sigma=1$ तथा [9, p. 139 (7)] सूत्र को व्यवहृत करने पर (3·1) एर्डेल्यी के ज्ञात फल [1, p. 422 (14)] में घटित हो जाता है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० यू० सी० जैन का आभारी है जिन्होंने इस शोध पत्र की तैयारी में मार्ग-दर्शन किया ।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० । Tables of Integral Transforms. भाग II मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1954.
2. वही । Higher Transcendental Functions, मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1953.
3. गोल्डस्टीन, एस० । लन्दन मैथ० सोसा०, 1932, 34.
4. शर्मा, बी० एल० । Annal. Dela, Soc. Bruxelles, 1965, T. **79**.
5. गुप्ता, एस० सी० । प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया, 1969, **39**, (A) II.
6. गुप्ता, के० सी० तथा जैन, यू० सी० । वही (प्रेस में)
7. माइजर, सी० एस० । Ned. Acad. Wet, Am-sterdam. 1941, 44.
8. कपूर, वी० के० । प्रोसी० कैम्ब्रि० फिला० सोसा०, 1968, **64**, 399.
9. शर्मा, बी० एल० । प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया, 1967, **37**(A) II.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 1, January 1973, Pages 31-36

कोबर संकारकों का सार्वीकरण

आर० के० सक्सेना तथा आर० के० कुम्भात
गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—फरवरी 18, 1972]

सारांश

भिन्नात्मक समाकलन के दो नवीन संकारकों की परिभाषा दी गई है। ये कोबर संकारकों का सार्वीकरण करते हैं। इन संकारकों के लिये तीन प्रमेय स्थापित किये गये हैं। पारिभाषित संकारकों तथा कोबर संकारकों के मध्य कुछ सम्बन्ध भी प्राप्त किये गये हैं।

Abstract

A generalization of Kober operators. *By* R. K. Saxena and R. K. Kumbhat, Department of Mathematics, University of Jodhpur, Jodhpur.

The authors have defined two new operators of fractional integration which generalise the operators due to Kober. Three theorems are established for these operators. Some relations between the operators defined in the present paper and Kober operators are also obtained.

1. भूमिका : अनेक लेखकों ने समय समय पर भिन्नात्मक समाकल संकारकों की विभिन्न परिभाषाय दी हैं जिनमें से एर्डेल्यी [1, p. 229], कोबर [5, p. 194] तथा वेइल[9] द्वारा दी गई परिभाषायें उल्लेखनीय हैं। इनका सार्वीकरण सक्सेना [7, p. 288] तथा लोन्डीज [6, p. 140] ने किया है। सक्सेना के संकारकों का और आगे सार्वीकरण कल्ला तथा सक्सेना [4, p. 231] ने किया है। प्रस्तुत शोध पत्र में हमने भिन्नात्मक समाकल के दो संकारक दिये हैं जिनसे कोबर के संकारकों का शानदार सार्वीकरण प्राप्त होता है। इन संकारकों के हेतु तीन प्रमेय सिद्ध किये गये हैं। प्रथम दो प्रमेयों से इन संकारकों के मेलिन परिवर्तों के व्यंजक प्राप्त होते हैं जब कि तीसरा प्रमेय खंडों में भिन्नात्मक समाकलन नामक गुण को बताता है। ऐसी आशा है कि कतिपय द्विक तथा त्रिक समाकल समीकरणों का हल, जो गणितीय भौतिकी तथा रसायन के विशिष्ट फलनों से सम्बन्धित है, इन संकारकों के सम्प्रयोग द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।

2. **परिभाषायें :** भिन्नात्मक संकारकों को हम निम्नांकित सम्बन्धों के द्वारा पारिभाषित करेंगे :

$$R[f(x)]=R\begin{bmatrix}\alpha, \beta, \gamma; \\ \sigma, \rho, a;\end{bmatrix} f(x)$$

$$=\frac{x^{-\sigma-\rho}}{\Gamma(\rho)}\int_0^x F\left[\alpha, \beta; \gamma; a\left(1-\frac{t}{x}\right)\right] t^{\sigma}(x-t)^{\rho-1}f(t)dt \qquad (2\cdot1)$$

तथा

$$K[f(x)]=K\begin{bmatrix}\alpha, \beta, \gamma; \\ \delta, \rho, a;\end{bmatrix} f(x)$$

$$=\frac{x^{\delta}}{\Gamma(\rho)}\int_x^{\infty} F\left[\alpha, \beta; \gamma; a\left(1-\frac{x}{t}\right)\right]t^{-\delta-\rho}(t-x)^{\rho-1}f(t)\, dt. \qquad (2\cdot2)$$

जहाँ $F[\alpha, \beta; \gamma; x]$ से गास का हाइपरज्यामितीय फलन $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \delta, \rho$ व्यक्त होता है और a संकुल प्राचल हैं। गास के हाइपरज्यामितीय फलन के उपगामी प्रसारणों से यह सरलतापूर्वक निकलता है कि इन संकारकों का अस्तित्व निम्नांकित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत होता है :

(i) $p\geqslant1,\ q<\infty,\ p^{-1}+q^{-1}=1,\ \ |\arg(1-a)|<\pi,$

(ii) $Re(\sigma)>-\frac{1}{q},\ \ Re(\delta)>\frac{1}{q},\ Re(\rho)>0,$

(iii) $\gamma\neq0, -1, -2,\ldots;\ Re(\gamma-\alpha-\beta)>0,$

(iv) $f(x)\epsilon L_p(0, \infty)$.

अन्तिम प्रतिबन्ध से इसका आश्वासन प्राप्त होता है कि $R[f(x)]$ तथा $K[f(x)]$ दोनों का अस्तित्व है और वे दोनों $L_p(0, \infty)$ से सम्बन्धित भी हैं। जब $a=0$ तो (2·1) तथा (2·2) से कोबर के संकारकों [5, p. 193] की प्राप्ति होती है।

यदि a को a/α द्वारा प्रतिस्थापित कर दें तथा सीमा को $\alpha\to\infty$ लें तो (2·1) तथा (2·2) क्रमशः निम्नांकित संकारकों में परिणत हो जाते हैं :

$$R\begin{Bmatrix}\beta, \gamma; \\ \sigma, \rho, a;\end{Bmatrix} f(x)=\lim_{\alpha\to\infty} R\begin{bmatrix}\alpha, \beta, \gamma; \\ \sigma, \rho, a/\alpha;\end{bmatrix} f(x)$$

$$=\frac{x^{-\sigma-\rho}}{\Gamma(\rho)}\int_0^x F\left[\beta; \gamma; a\left(1-\frac{t}{x}\right)\right] t^{\sigma}(x-t)^{\rho-1}f(t)\, dt \qquad (2\cdot3)$$

तथा

$$K\left[\begin{matrix}\beta, \gamma; \\ \sigma, \rho, a;\end{matrix} f(x)\right] = \lim_{\alpha\to\infty} K\left[\begin{matrix}\alpha, \beta, \gamma; \\ \delta, \rho, a/\alpha;\end{matrix} f(x)\right]$$

$$= \frac{x^{\delta}}{\Gamma(\rho)} \int_0^{\infty} F\left[\beta; \gamma; a\left(1-\frac{x}{t}\right)\right] t^{-\delta-\rho}(t-x)^{\rho-1} f(t)\, dt \tag{2·4}$$

$f(x)$ के मेलिन परिवर्त को $M[f(x)]$ द्वारा व्यंजित किया जावेगा। जहाँ p तथा t वास्तविक हैं वहाँ हम $s=p^{-1}+it$ लिखेंगे। यदि $p \geqslant 1$, $f(x) \in L_p(0, \infty)$ तो

$$p=1, M[f(x)] = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x)\, dx. \tag{2·5}$$

$$p>0, M[f(x)] = 1.\, i.\, m.\, \int_{1/x}^{x} x^{s-1} f(x)\, dx, \tag{2·6}$$

जहाँ 1 . i. m. द्वारा L_p-अवकाशों की माध्य सीमा व्यक्त होती है।

3. प्रमेय

प्रमेय I: यदि $f(x) \in L_p(0, \infty)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$ [अथवा $f(x) \in M_p(0, \infty)$ तथा $p>2$], $\gamma \neq 0, -1, 2, \ldots$; $Re(\gamma-\alpha-\beta)>0$, $|\arg(1-a)|<\pi$, $Re(\sigma)>-\frac{1}{q}$, $Re(\rho)>0$, $Re(\alpha-\sigma)>-\frac{1}{q}$, $Re(\beta-\sigma)>\frac{1}{q}$ तथा $Re(\sigma-s+1)>0$ तो

$$M\left\{R\left[\begin{matrix}\alpha, \beta, \gamma; \\ \sigma, \rho, a;\end{matrix} f(x)\right]\right\} = \frac{\Gamma(\sigma-s+1)}{\Gamma(\sigma+\rho-s+1)}\, {}_3F_2[\alpha, \beta, \rho; \gamma, \sigma+\rho-s+1; a]$$
$$\times M[f(x)] \tag{3·1}$$

जहाँ $M_p(0, \infty)$ द्वारा $L_p(0, \infty)$ के समस्त $f(x)$ फलनों की श्रेणी घोषित होती है जिसमें $p>2$, और जो $L_p(-\infty, \infty)$ फलनों के व्युत्क्रम मेलिन परिवर्त होते हैं।

उपपत्ति

हमें (2·1) से

$$M\left\{R\left[\begin{matrix}\alpha, \beta, \gamma; \\ \sigma, \rho, a;\end{matrix} f(x)\right]\right\} = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1-\sigma-\rho}}{\Gamma(\rho)} \int_0^{x} F\left[\alpha, \beta; \gamma; a\left(1-\frac{t}{x}\right)\right]$$
$$\times t^{\sigma}(x-t)^{\rho-1} f(t)\, dt\, dx$$

की प्राप्ति सरलतापूर्वक हो जाती है। प्रमेय के कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध होने के कारण समाकल के क्रम को परिवर्तित करना न्यायसंगत है जिससे हमें की आगे दिये गये फल की प्राप्ति होती है।

$$M\left\{ R\begin{bmatrix}\alpha, \beta, \gamma; \\ \sigma, \rho, a;\end{bmatrix} f(x) \right\} = \int_0^\infty \frac{t^\sigma f(t)\, dt}{\Gamma(\rho)} \int_t^\infty F\left[\alpha, \beta; \gamma; a\left(1-\frac{t}{x}\right)\right]$$

$$\times x^{s-1-\sigma-\rho}\,(x-t)^{\rho-1}\,dx$$

सूत्र [2, p. 399] के द्वारा x-समाकल का मान ज्ञात करने पर उपर्युक्त से तुरन्त ही प्रमेय की प्राप्ति हो जाती है :

उपप्रमेय : यदि $\rho=\gamma$ तथा $a=1$ मान लिया जाय तो (3·1) में दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत हमें निम्नांकित की प्राप्ति होगी :

$$M\left\{ R\begin{bmatrix}\alpha, \beta, \gamma; \\ \sigma, \gamma, 1;\end{bmatrix} f(x) \right\} = \frac{\Gamma(\sigma-s+1)\Gamma(\sigma+\gamma+1-\alpha-\beta-s)}{\Gamma(\sigma+\gamma+1-\alpha-s)\Gamma(\sigma+\gamma+1-\beta-s)} M[f(x)] \qquad (3{\cdot}2)$$

प्रमेय II : यदि $f(x) \in L_p(0, \infty)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$ [या $f(x) \in M_p(0, \infty)$, $p>2$], $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$; $Re(\delta) > -\frac{1}{p}$, $Re(\rho)>0$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, $Re(\delta+s)>0$, $|\arg(1-a)|<\pi$, तो

$$M\left\{ K\left[R\begin{matrix}\alpha, \beta, \gamma; \\ \delta, \rho, a;\end{matrix}, f(x)\right]\right\} = \frac{\Gamma(\delta+s)}{\Gamma(\delta+\rho+s)}\, {}_3F_2[\alpha, \beta, \rho; \gamma, \delta+\rho+s; a]\; M[f(x)] \qquad (3{\cdot}3)$$

उपप्रमेय : (3·3) में दिये गये प्रतिबन्धों के फलस्वरूप निम्नांकित फल प्राप्त होता है :

$$M\left\{ K\begin{bmatrix}\alpha, \beta, \gamma; \\ \delta, \gamma, 1;\end{bmatrix} f(x) \right\} = \frac{\Gamma(\delta+s)\Gamma(\delta+\gamma+s-\alpha-\beta)}{\Gamma(\delta+\gamma+s-\alpha)\Gamma(\delta+\gamma+s-\beta)} M[f(x)] \qquad (3{\cdot}4)$$

(3·3) में $\rho=r$ तथा $a=1$ रखने से (3·1) प्राप्त होता है।

प्रमेय III : यदि $f(x) \in L_p(0, \infty)$, $g(x) \in L_q(0, \infty)$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$; $Re(\gamma-\alpha-\beta)>0$, $Re(\rho)>0$, $Re(\sigma)>\max(-p^{-1}, -q^{-1})$, तो

$$\int_0^\infty f(x)\, R\begin{bmatrix}\alpha, \beta, \gamma; \\ \sigma, \rho, a;\end{bmatrix} g(x)\, dx = \int_0^\infty g(x) K\begin{bmatrix}\alpha, \beta, \gamma; \\ \sigma, \rho, a;\end{bmatrix} f(x)\, dx \qquad (3{\cdot}5)$$

उपपत्ति : (2·1) तथा (2·2) से (3·5) को सरलतापूर्वक प्राप्त किया जा सकता है।

4. (2·1) तथा (2·2) संकारकों एवं कोबर संकारकों के मध्य सम्बन्ध

समाकल [2, p. 400] तथा [9, p. 24] को उपयोग में लाने से निम्नांकित फलों को स्थापित किया जा सकता है :

$$R\begin{bmatrix}\alpha, \beta, \gamma; \\ \sigma+\rho, \gamma, a;\end{bmatrix} I_{\sigma,\rho}[f(x)] = R\begin{bmatrix}\alpha, \beta, \gamma+\rho; \\ \sigma, \gamma+\rho, a;\end{bmatrix} f(x) \qquad (4{\cdot}1)$$

$$I_{\sigma+\rho,\gamma}\left[R\begin{Bmatrix}\alpha, \beta, \rho; \\ \sigma, \rho, a;\end{Bmatrix} f(x) \right] = R\begin{bmatrix}\alpha, \beta, \gamma+\rho; \\ \sigma, \gamma+\rho, a;\end{bmatrix} f(x) \qquad (4{\cdot}2)$$

$$K\begin{bmatrix} \alpha, \beta, \gamma; \\ \delta+\rho, \gamma, a; \end{bmatrix} K_{\delta,\rho}\{f(x)\} \Big] = K\begin{bmatrix} \alpha, \beta, \gamma+\delta; \\ \delta, \gamma+\rho, a; \end{bmatrix} f(x) \Big] \quad (4\cdot3)$$

$$K_{\delta+\rho,\gamma}\left\{ K\begin{bmatrix} \alpha, \beta, \rho; \\ \delta, \rho, a; \end{bmatrix} f(x) \Big] \right\} = K\begin{bmatrix} \alpha, \beta, \gamma+\rho; \\ \delta, \gamma+\rho, a; \end{bmatrix} f(x) \quad (4\cdot4)$$

$$R\left\{ \begin{matrix} \alpha, \beta, \rho; \\ \sigma, \rho, 1, \end{matrix} R\begin{bmatrix} \alpha-\rho, \delta-\beta, \delta-\rho; \\ \sigma+\rho-\beta, \delta-\rho, 1; \end{bmatrix} f(x) \Big] \right\} = I_{\sigma+\rho-2\alpha,\delta}[f(x)] \quad (4\cdot5)$$

$$R\left\{ \begin{matrix} \alpha, \beta, \rho; \\ \sigma, \rho, 1; \end{matrix} K\begin{bmatrix} \alpha-\rho, \delta-\beta, \delta-\rho; \\ \sigma+\rho-\beta, \delta-\rho, 1; \end{bmatrix} f(x) \Big] \right\} = K_{\sigma+\rho-2\alpha,\delta}[f(x)] \quad (4\cdot6)$$

$$R\left\{ \begin{matrix} -\delta, \beta, \rho; \\ \sigma, \rho, 1; \end{matrix} R\begin{bmatrix} \beta, -\beta, \delta; \\ \sigma+\rho, \delta, 1; \end{bmatrix} f(x) \Big] \right\} = R\begin{bmatrix} \rho+\delta+\beta, \rho-\beta, \rho+\delta; \\ \sigma+\rho, \rho+\delta, 1 \end{bmatrix} f(x) \Big] \quad (4\cdot7)$$

तथा

$$K\left\{ \begin{matrix} -\delta, \beta, \rho; \\ \sigma, \rho, 1: \end{matrix} K\begin{bmatrix} \beta, -\beta, \delta; \\ \sigma+\rho, \delta, 1; \end{bmatrix} f(x) \Big] \right\} = K\begin{bmatrix} \rho+\delta+\beta, \rho-\beta, \rho+\delta; \\ \sigma+\rho, \rho+\delta, 1 \end{bmatrix} f(x) \Big] \quad (4\cdot8)$$

5. (2·1) तथा (2·2) संकारकों का सार्वीकरण

अन्त में यह रोचक प्रेक्षण है कि (2·1) तथा (2·2) के द्वारा पारिभाषित संकारकों का सार्वीकरण निम्नांकित सम्बन्धों के द्वारा तथा उनके अनेक गुणों के द्वारा जो अनुभाग 3 में दिये गये गुणों के समान हैं उन्हें भी इसी विधि से व्युत्पन्न किया जा सकता है ।

$$R[f(x)] = R\begin{bmatrix} \alpha, \beta, \gamma; \\ \sigma, m, \rho, a; \end{bmatrix} f(x) \Big]$$

$$= \frac{m x^{-\sigma-m\rho+m-1}}{\Gamma(\rho)} \int_0^x t^{\sigma}(x^m-t^m)^{\rho-1} F\left[\alpha, \beta; \gamma, a\left(1-\frac{t^m}{x^m}\right)\right] \times f(t)\, dt \quad (5\cdot1)$$

तथा

$$K[f(x)] = K\begin{bmatrix} \alpha, \beta, \gamma; \\ \delta, m, \rho, a; \end{bmatrix} f(x) \Big]$$

$$= \frac{m x^{\delta}}{\Gamma(\rho)} \int_x^{\infty} t^{-\delta-m\rho+m-1} (t^m-x^m)^{\rho-1}$$

$$\times F\left[\alpha, \beta; \;\; ; \;\; a\left(1-\frac{x^m}{t^m}\right)\right] f(t)\, dt \quad (5\cdot2)$$

ऊपर जिन संकारकों की परिभाषा दी गई है उनका अस्तित्व निम्नांकित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत पाया जाता है :

(i) $p \geqslant 1,\ q < \infty,\ p^{-1}+q^{-1}=1,\ m>0,\ |\arg(1-a)|<\pi,$

(ii) $Re(\rho)>0,\ Re(\sigma)>-\frac{1}{q},\ Re(\delta)>-\frac{1}{p},$

(iii) $f(x) \in L_p(0, \infty)$

(iv) $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots;\ Re(\gamma-\alpha-\beta)>0.$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक प्रोफेसर आर० एस० कुशवाहा के परम आभारी हैं जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी के लिये उनको प्रोत्साहित किया।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०। Univ. e. Politec. Torino. Rend. Sem. Mat. 1940, **10**, 217-234.

2. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि। Tables of Integral Transforms. भाग 2, न्यूयार्क, मैकग्राहिल, 1954.

3. फाक्स, सी०। ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०, 1961, **98**, 395-429.

4. कल्ला, एस० एल० तथा सक्सेना, आर० के०। Math. Zeitschr. 1969, **108**, 231-234.

5. कोबर, एच०। क्वार्ट० जर्न० मैथ० (आक्सफोर्ड), 1940, **11**, 193-211.

6. लोण्डीज़, जे० एस०। प्रोसी० एडिन० मैथ० सोसा०, (2), 139-148.

7. सक्सेना, आर० के०। Math. Zeitschr., 1967, **96**, 288-291.

8. स्नेडान, आई० एन०। Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry, ओलिवर तथा बायड, न्यूयार्क, 1961.

9. वेइल, एच०। Viertel jahrsschr d-Naturf-Ges. Zurich., 1917, **62**, 296-302.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 1, January, 1973 Pages 37-45

लेगेण्ड्र फलनों तथा सार्वीकृत फलन सम्बन्धी निश्चित समाकल

ओ० पी० पराशर तथा ए० एन० गोयल
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—मार्च 1, 1972]

सारांश

लेगेण्ड्र फलनों तथा सार्वीकृत फलन के गुणनफल वाले दो निश्चित समकलों का मान ज्ञात किया गया है। रोचक दशायें भी दी गई हैं।

Abstract

Definite integrals involving Legendre functions and the generalised function. *By* O. P. Parashar and A. N. Goyal, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

Two definite integrals involving the products of Legendre functions with the generalised function have been evaluated. Interesting particular cases are also given.

1. **भूमिका :** प्रस्तुत शोधपत्र में दो समाकल दिये गये हैं जिनमें लेगेण्ड्र फलन के साथ सार्वीकृत A^* फलन का गुणनफल निहित है। शर्मा (1967), सरन (1965) तथा भट्ट (1966) के कुछ ज्ञात फल प्रस्तुत खोज के उपप्रमेय बन जाते हैं।

2. **ज्ञात फल :** चतुर्वेदी (1970) ने $A^*(x, y)$ की परिभाषा निम्न प्रकार से दी है :

$$A^{*m_1,0;m_2n_2;m_3n_3}_{p_1q_1;p_2q_2;p_3q_3}\left[\begin{array}{c|l} x & ((ap_1, \alpha p_1)); ((bq_1, \beta q_1)) \\ & ((cp_2, \gamma p_2)); ((dq_2, \delta q_2)) \\ y & ((ep_3\ \lambda p_3)); ((fq_3\ \mu q_3)) \end{array}\right] = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2} \phi(s, t)\psi(s, t)x^s y^t\, ds\, dt.$$

जहाँ

$$\phi(s+t) = \frac{\prod_{j=1}^{m_1} \Gamma(a_j+\alpha_j s+\alpha_j t)}{\prod_{j=1+m_1}^{p_1} \Gamma(1-a_j-\alpha_j s-\alpha_j t) \prod_{j=1}^{q_1} \Gamma(b_j+\beta_j s+\beta_j t)}$$

$$\psi(s+t)=\frac{\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(1-c_j+\gamma_j s)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(d_j-\delta_j s)\prod_{j=1}^{m_3}\Gamma(1-e_j+\lambda_j t)\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(f_j-\mu_j t)}{\prod_{j=1+m_2}^{p_2}\Gamma(c_j-\gamma_j s)\prod_{j=1+n_2}^{q_2}\Gamma(1-d_j+\delta_j s)\prod_{j=1+m_3}^{p_3}\Gamma(e_j-\lambda_j t)\prod_{j=1+n_3}^{q_3}\Gamma(1-f_j+\mu_j t)}$$

जहाँ $((ap_1\ ap_1))$ द्वारा अनुक्रम $(a_1\alpha_1)(a_2\alpha_2)\ldots(ap_1\alpha p_1)$ व्यक्त होता है।

पुन: सभी, $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \lambda', \mu'$ धन हैं। L_1, L_2 क्रमश: s तथा t तलों पर उपयुक्त कंटूर हैं जो अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक फैले हैं जिससे यह निश्चय हो ले कि $\Gamma(d_j-\delta_j s)$, $j=1, 2, 3, \ldots n_2$ के पोल दाईं ओर और $\Gamma(1-c_j+\gamma_j s)$, $j=1, 2, 3, \ldots m_2$, $\Gamma(a_j+\alpha_j s+\alpha_j t)$, $j=1, 2, 3, \ldots m_1$ के पोल L_1 कंटूर के बाईं ओर स्थित रहें। $\Gamma(f_j-\mu_j t)$, $j=1, 2, 3, \ldots n_3$ के पोल L_2 कंटूर के दाहिनी ओर तथा $\Gamma(1-e_j+\lambda_j t)$, $j=1, 2, \ldots m_3$, $\Gamma(a_j+\alpha_j s+\alpha_j t)$ के पोल उसके बाईं ओर स्थित हैं।

पूर्णांकों से निम्नांकित असमिकाओं की तुष्टि होती है :

$q_1, q_3 \geqslant 1$; $p_1, q_1 \geqslant 0$; $0 \leqslant m_1, m_2, m_3, n_2, n_3 \leqslant p_1, p_2, p_3, q_2, q_3$; $p_1+p_2 \leqslant q_1+q_2$;

$p_1+p_3 \leqslant q_1+q_3$; $\alpha p_1+\gamma p_2 \leqslant \beta q_1+\delta q_2$; $\alpha p_1+\lambda p_3 \leqslant \beta q_1+\mu q_3$

$$\left.\begin{array}{l}2(m_1+m_2+n_2)>p_1+p_2+q_1+q_2;\ |\arg x|<(m_1+m_2+n_2-\frac{1}{2}p_1-\frac{1}{2}p_2-\frac{1}{2}q_1-\frac{1}{2}q_2)\pi\\ 2(m_1+m_3+n_3)>p_1+p_3+q_1+q_3;\ |\arg y|<(m_1+m_3+n_3-\frac{1}{2}p_1-\frac{1}{2}p_3-\frac{1}{2}q_1-\frac{1}{2}q_3)\pi\end{array}\right\}(A)$$

$$\Gamma(mZ)=(2\pi)^{1/2(1-m)}\,m^{mZ-1/2}\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(Z+\frac{k}{m}\right),$$

यदि $R(\lambda)>-1$, $R(\mu)<1$

$$\int_0^1 x^{\lambda}(1-x^2)^{-1/2\mu}P_v^{\mu}(x)\,dx=\frac{2^{\mu-1}\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda)\,\Gamma(1+\frac{1}{2}\lambda)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu)}$$

3. यदि प्रतिबन्ध (A) तथा

$$\psi_{k+1}=\frac{1+\lambda+2k}{2n};\ \psi_{k+n+1}=\frac{2+\lambda+2k}{2n};\ \psi_{k+1}=\frac{2+\lambda-\nu-\mu+2k}{2n};$$

$$\psi_{k+n+1}=\frac{3+\lambda+\nu-\mu+2k}{2n}$$

$k=0, 1, 2, \ldots (n-1)$.

$R(1-\mu)>0$; $R(ndi+nfj+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2})>0$

$$i=1\ldots n_2 \quad j=1, \ldots n_3$$

तो

$$\int_0^1 x^{\lambda}(1-x^2)^{-1/2\mu} \quad P_v^{\mu}(x) \; A^{*m_1,0;m_2,n_2;m_3n_3}_{p_1\, q_1;\, p_2q_2;\, p_3q_3}\left[\begin{array}{c|c} ax^{2n} & ((ap_1\alpha p_1));\ ((bq_1\beta q_1)) \\ & ((cp_2\gamma p_2));\ ((dq_2\delta q_2)) \\ by^{2n} & ((ep_3\lambda p_3));\ ((fq_3\mu q_3)) \end{array}\right] dx$$

$$=(2x)^{\mu-1} \; A^{*m_1+2n,0;m_2n_2;m_3n_3}_{p_1+2n,q_1+2n;\, p_2q_2;\, p_3q_3}\left[\begin{array}{c|c} a & ((\phi_{2n},1))((ap_1\alpha p_1));\ ((\psi_{2n},1))\ ((bq_1\beta q_1)) \\ & ((cp_2\gamma p_2));\ ((dq_2\delta q_2)) \\ b & ((ep_3\lambda p_3));\ ((fq_3\mu q_3)) \end{array}\right]$$

उपपत्ति :

(4) को सिद्ध करने के लिये (2) से A^* फलन के मान को (4) में बाईं ओर लिख लेते हैं; समाकलन के क्रम को बदल लेते हैं क्योंकि ऊपर दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत यह वैध है, आन्तरिक समाकल में (2·2) का उपयोग करते हैं और (2) की सहायता से विवेचना करते हैं तो तुरन्त ही (4) के दाईं ओर दिया हुआ मान प्राप्त होता है।

यही नहीं, कंटूर L_i s तल पर होता है और $-i\infty$ से $+i\infty$ तक इस प्रकार जाता है कि $\Gamma(d_j-\delta_j s), j=1, 2, 3, \ldots n_2$ के पोल कंटूर L_1 के दाईं ओर तथा $\Gamma(a_j+\alpha_j s+\alpha_j t), j=1, 2, \ldots m_1$; $\Gamma\left(\frac{1+\gamma+2k}{2n}+s+t\right)$ तथा $\Gamma\left(\frac{2+\lambda+2k}{2n}+s+t\right)$, $k=0, 1, \ldots(n-1)$, $\Gamma(1-c_j+\gamma_j s)$, $j=1,2, \ldots m_2$ के पोल उसके बाईं ओर स्थित हों।

इसी तरह कंटूर L_2 t तल में होता है और $-i\infty$ से $+i\infty$ तक इस प्रकार जाता है कि $\Gamma(f_j-\mu_j t)$, $j=1, 2, \ldots n_3$ के पोल कंटूर के दाईं ओर और $\Gamma(a_j+\alpha_j s+\alpha_j t), j=1, 2, \ldots m_1$, $\Gamma\left(\frac{1+\lambda+2k}{2n}+s+t\right)$ तथा $\Gamma\left(\frac{2+\lambda+2k}{2n}+s+t\right)$, $k=0, 1, \ldots (n-1)$, $\Gamma(1-e_j-\lambda_j t), j=1, 2, \ldots m_3$ के पोल उसके बाईं ओर स्थित हों।

4. विशिष्ट दशाएँ :

कुछ रोचक विशिष्ट दशायें यहाँ दी जा रही हैं :

(*a*) यदि $\alpha_j=\beta_j=\gamma_j=\delta_j=\lambda_j=\mu_j=1$ तो हमें शर्मा (1967) द्वारा दिया गया फल प्राप्त होता है।

(*b*) यदि $p_1=q_1=m_1=0$, तो

$$\int_0^1 x^{\lambda}(1-x^2)^{-1/2\mu} P_v^{\mu}(x)\; H^{n_2m_2}_{p_2q_2}\left[ax^{2n}\middle|\begin{array}{c}((cp_2\gamma p_2))\\((dq_2\delta q_2))\end{array}\right] H^{n_3m_3}_{p_3q_3}\left[by^{2n}\middle|\begin{array}{c}((ep_3\lambda p_3))\\((fq_3\mu q))\end{array}\right]dx$$

$$=(2n)^{\mu-1}A^{2n,0;\ m_2n_2;\ m_3n_3}_{2n,2n;\ p_2q_2;\ p_3q_3}\left[\begin{array}{c|l} a & ((\phi_{2n},1));\ ((\psi_{2n},1)) \\ & ((cp_2\gamma p_2));\ ((dq_2\ \delta q_2))) \\ b & ((ep_3\lambda p_3));\ ((fq_3\ \mu q_3)) \end{array}\right]$$

$$\phi_{k+1}=\frac{1+\lambda+2k}{2n},\ \phi_{k+n+1}\frac{2+\lambda+2k}{2n},\ \psi_{k+1}=\frac{2+\lambda-\nu-\mu+2k}{2n};$$

$$\psi_{k+n+1}=\frac{3+\lambda+\nu-\mu+2k}{2n}$$

(b_1) यदि (b) में हम $m_2=m_3=p_2=p_3=0$, $n_2=n_3=1$, $q_2=q_3=2$, $c_1=e_1=0$, $\gamma_1=\lambda_1=1$, $a_1=-\phi_1$, $f_1=-\phi_2$, $\delta_1=\theta_1$, $\mu_1=\theta_2$ रखें तो

$$\int_0^1 x^\lambda(1-x^2)^{-1/2\mu}P_v^\mu(x)\ \mathcal{J}^{\theta_1}_{\phi_1}(ax^{2n})\mathcal{J}^{\theta_1}_{\phi_2}(bx^{2n})dx$$

$$=A^{*2n,0;0,1;01}_{2n,2n;0,2;02}\left[\begin{array}{c|l} a & ((\phi_{2n},1));((\psi_{2n},1)) \\ & ;(0,1)(-\phi_1,\theta_1) \\ b & ;(0,1)(-\phi_2\theta_2) \end{array}\right]$$

जहाँ $\mathcal{J}^{\theta}_{\phi_1}(x)$ मैटलैंड सार्वीकृत बेसेल फलन है।

$$\phi_{k+1}=\frac{1+\lambda+2k}{2n},\ \phi_{k+n+1}=\frac{2+\lambda+2k}{2n},\ \psi_{k+1}=\frac{2+\lambda-\nu-\mu+2k}{2n},$$

$$\psi_{k+n+1}=\frac{3+\lambda+\nu-\mu+2k}{2n}$$

जहाँ $k=0, 1, \ldots (n-1)$.

(b_2) यदि (b) में हम $n_2=n_3=1$, $m_2=p_2$, $q_2=q_2+1$, $m_3=p_3$, $q_3=q_3+1$ रखें तो

$$\int_0^1 x^\lambda(1-x^2)^{-1/2\mu}\ P_v^\mu(x)\ {}_{p_2}\psi_{q_2}\left[\begin{matrix}((1-cp,\ \gamma p_3)) \\ ((1-dq_2\ \delta q_2))\end{matrix};-ax^{2n}\right]{}_{p_3}\psi_{q_3}\left[\begin{matrix}((1-ep_3,\ \lambda p_3)) \\ ((1-f_{q_3},\ \mu_{q_3}))\end{matrix};-by^{2n}\right]dx$$

$$=(2n)^{\mu-1}A^{2n;\ 0;\ p_2,1;\ p_3,1}_{2n,2n;\ p_2q_2+1;\ p_3q_3+1}\left[\begin{array}{c|l} a & ((\phi_{2n},1));\ ((\psi_{2n},1)) \\ & ((cp_2\gamma p_2));\ (1,1)((dq_2\delta q_2)) \\ b & ((ep_3\ \lambda p_3));\ (1,1)((fq_3\mu q_3)) \end{array}\right]$$

जहाँ ${}_p\psi_q(x)$ राइट का सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन है।

(b_3) यदि (b) में हम $m_2=m_3=n_2=n_3=p_2=p_3=q_2=q_3=1$ $c_1=1-\phi_1$, $e_1=1-\phi_2$, $\gamma_1=\theta_1$, $\lambda_1=\theta_2$, $d_1=f_1=0$, $\delta_1=\mu_1=1$, $0<\theta_1\theta_2<1$ रखें तो

$$\int_0^1 x^\lambda(1-x^2)^{-1/2\mu}P_v^\mu(x)\ G^{\theta_1}_{\phi_1}(ax^{2n})\ G^{\theta_2}_{\phi_2}(bx^{2n})dx$$

$$=\theta_1\theta_2(2n)^{\mu-1}\ A^{2n,0;\ 11;\ 11,}_{2n,2n;\ 11;\ 11}\left[\begin{array}{c|l} a & ((\phi_{2n},\ 1)\ \ ;((\psi_{2n},\ 1)) \\ & (1-\phi,\ \theta_1);\ (0,\ 1) \\ b & (1-\phi_2\theta_2);\ (0,\ 1) \end{array}\right]$$

जहाँ $G^{\theta_1}_{\phi_1}(x)$ सार्वीकृत परावलयी सिलिंडर फलन है।

(c) यदि (b) के अतिरिक्त $p_1=q_1=m_1=0$ तो

$$\int_0^1 x^\lambda(1-x^2)^{-1/2\mu}P^\mu_v(x)\ G^{n_2m_2}_{p_2q_2}\left(ax^{2n}\left|\begin{matrix}(cp_2)\\(dq_2)\end{matrix}\right.\right)\ G^{n_3m_3}_{p_3q_3}\left(bx^{2n}\left|\begin{matrix}(ep_3)\\(fq_3)\end{matrix}\right.\right)dx$$

$$=(2n)^{\mu-1}\ A^{*2n,0;\ m_2n_2;\ m_3n_3}_{2n,2n;\ p_2q_2;\ p_3q_3}\left[\begin{array}{c|l} a & ((\phi_{2n},\ 1));\ ((\psi_{2n},\ 1)) \\ & ((cp_2,\ 1));\ ((dq_2,\ 1)) \\ b & ((ep_3,\ 1));\ ((fq_3,\ 1)) \end{array}\right]$$

(c_1) यदि (c) के अतिरिक्त $n_2=n_3=q_2=q_3=4,\ m_2=m_3=0,\ p_2=p_3=2$ तथा विख्यात फल

$$x^\sigma k_b(x)\ k\mu(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ G^{4,\ 0}_{2\ 4}\left(x^2\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\sigma,\ \frac{1}{2}\sigma+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}(\nu+\mu+\sigma),\ \frac{1}{2}(\sigma-\nu-\mu),\ \frac{1}{2}(\nu+\sigma-\mu),\ \frac{1}{2}(\mu+\sigma-\nu)\end{matrix}\right.\right)$$

का उपयोग करने पर निम्नांकित फल प्राप्त होगा :

$$\int_0^1 x^\lambda(1-x^2)^{-1/2\mu}\ P^\mu_\nu(x)k_{\rho_1}(ax)\ k_{\rho_2}(ax)\ k\rho_3(bx)\ k\rho_4(bx)dx$$

$$=A^{*2,0;\ 0,4;\ 04}_{2,2;\ 2,4;\ 24}\left[\begin{array}{c|l} & (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda,\ 1);\ (\frac{1}{2}\lambda+1,\ 1);\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}+1,\ 1\right)\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{\mu}{2}+\frac{3}{2},\ 1\right) \\ a^2 & (0,\ 1)(\frac{1}{2},\ 1)\left(\frac{\rho_1}{2}+\frac{\rho_2}{2},\ 1\right);\left(\frac{\rho_1}{2}-\frac{\rho_2}{2},\ 1\right)\left(\frac{\rho_2-\rho_1}{2},\ 1\right)\left(-\frac{\rho_1}{2}-\frac{\rho_2}{2},\ 1\right) \\ b^2 & (0,\ 1)(\frac{1}{2},\ 1)\left(\frac{\rho_3}{2}+\frac{\rho_4}{2},1\right);\left(\frac{\rho_3}{2}-\frac{\rho_4}{2},1\right)\left(\frac{\rho_4}{2}-\frac{\rho_3}{2},1\right)\left(-\frac{\rho_3}{2}-\frac{\rho_4}{2},\ 1\right) \end{array}\right]$$

$R(1-\mu)>0,\ R(\lambda\pm\rho_1\pm\rho_2\pm\rho_3\pm\rho_4+1)>0,\ |\arg a|<\pi\ \ |\arg b|<\pi.$

(c_2) यदि हम $n=1,\ n_2=n_3=4,\ m_1=m_3=0,\ p_2=p_3=2,\ q_2=q_3=4,\ m_1=p_1=q_1=2$

मानें और

$$x^\rho\ W_{k,m}(x)\ W_{-k,m}(x)=\pi^{-1/2}\ G^{4,0}_{2,4}\left(\frac{x^2}{4}\left|\begin{matrix}(\frac{1}{2}b+k+1)(\frac{1}{2}\rho-k+1)\\ \frac{1}{2}(\rho+1),\ \frac{1}{2}(\rho+2);\ (\frac{1}{2}\rho+m+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}\rho-m+\frac{1}{2})\end{matrix}\right.\right)$$

फल का उपयोग करें तो

$$\int_0^1 x^\lambda(1-x^2)^{-1/2\mu}\ \ P^\mu_v(x)\ W_{k_1m_1}(ax)\ W_{-k_1m_1}(ax)\ W_{k_2m_2}(bx)\ W_{-k2m_2}(bx)dx$$

$$=\frac{2^{\mu-1}}{\pi}\, A^{2,0;\,04;\,04}_{2,2;\,24;\,24}\left[\begin{array}{c|l} \frac{a^2}{4} & (\tfrac{1}{2}\lambda+\tfrac{1}{2},1)(\tfrac{1}{2}\lambda+1,1);\ (\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}\mu+1,1)\,(\tfrac{1}{2}\lambda+\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}\mu+\tfrac{3}{2},1) \\ & (1-k_1,1)(1+k_1,1);\ (\tfrac{1}{2},1)(1,1)(\tfrac{1}{2}+m_1,1)(\tfrac{1}{2}-m_1,1) \\ \frac{b^2}{4} & (1-k_2,1)(1+k_2,1);\ (\tfrac{1}{2},1)(1,1)(\tfrac{1}{2}+m_1,1)(\tfrac{1}{2}-m_2,1) \end{array}\right]$$

$R(1-\mu)>0,\ R(\lambda\pm 2m_1\pm 2m_2+3)>0,\ |\arg a|<\pi,\ |\arg b|<\pi$

(c_3) यदि $m_1=p_1=q_1=2,\ n=1,\ a_1=1+\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu,\ a_2=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\nu,$
$b_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda,\ b_2=1+\frac{1}{2}\lambda$ मान लें तो

$$\int_0^1 x^{\lambda}(1-x^2)^{-1/2\mu}\, P_\nu^\mu(x)\ A^{2,0;\,m_2n_2;\,m_3n_3}_{2,0;\,p_2q_2;\,p_3q_3}\left[\begin{array}{c|r} ax^2 & (1+\tfrac{1}{2}\lambda-\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}\mu,1)(\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}\lambda+\tfrac{1}{2}\nu-\tfrac{1}{2}\mu,1) \\ & (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\lambda,1)(1+\tfrac{1}{2}\lambda,1) \\ by^2 & ((cp_2\gamma p_2));((dq_2\delta q_2)) \\ & ((ep_3\lambda p_3));((fq_3\mu q_3)) \end{array}\right]$$

$$=2^{\mu-1}H^{n_2m_2}_{p_2q_2}\left[a\left|\begin{array}{l}((cp_2,\gamma p_2))\\((dq_2,\delta q_2))\end{array}\right.\right]H^{n_3m_3}_{p_3q_3}\left[b\left|\begin{array}{l}((ep_3,\lambda p_3))\\((fq_3,\mu q_3))\end{array}\right.\right]$$

5. द्वितीय समाकल :

यदि प्रतिबन्ध (A) के अतिरिक्त

$$\phi_{k+1}=\frac{1-\lambda+2k}{2n},\ \phi_{k+n+1}=\frac{2k-\lambda}{2n},\ \psi_{k+1}=\frac{\nu+\mu-\lambda+2k}{2n},\ \psi_{k+n+1}=\frac{\mu-\lambda-\nu-1+2k}{2n}$$

$k=0,1,2,\ldots(n-1),\quad R(1-\mu)>0,\quad R(\lambda+2nfi+1)>0,\quad i=1,2,3.\ldots n_3$

तो

$$\int_0^1 x^{\lambda}(1-x^2)^{-1/2\mu}\, P_\nu^\mu(x)\ A^{m_10;\,m_2n_2;\,m_3n_3}_{p_1q_1;\,p_2q_2;\,p_3q_3}\left[\begin{array}{c|l} a & ((ap_1\alpha p_1));\ ((bq_1\beta q_1)) \\ & ((cp_2\gamma p_2));\ ((dq_2\delta q_2)) \\ bx^{2n} & ((ep_3\lambda p_3));\ ((fq_3\mu q_3)) \end{array}\right]dx$$

$$=(2n)^{\mu-1}A^{*m_10;\,m_2n_2;\,m_3+2n,n_3}_{p_1q_1;\,p_2q_2;\,p_3+2n,q_3+2n}\left[\begin{array}{c|l} a & ((ap_1,\alpha p_1));\ ((bq_1\beta q_1)) \\ & ((cp_2,\gamma p_2));\ ((dq_2\delta q_2)) \\ b & ((\phi_{2n},1))((ep_3\lambda p_3));\ ((fq_3\mu q_3))((\psi_{2n},1)) \end{array}\right]$$

उपपत्ति :

प्रथम समाकल के ही समान ।

6. विशिष्ट दशायें :

(*a*) यदि $\alpha_j=\beta_j=\gamma_j=\delta_j=\lambda_j=\mu_j=1$, तो हमें शर्मा (1967) का फल प्राप्त होता है।

(*b*) $m_1=p_1=p$, $q_1=q$, $n_2=q_2=1$, $m_3=q_3=1$, $m_2=p_2=0=m_3=p_3$ रखने पर तथा गुणनफल सूत्र का उपयोग करने पर

$$ {}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1\ldots a_p\\ b_1\ldots b_q\end{matrix};-(x+y)\right]=\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j)}\;A^{*p,0;\;0,1;\;01}_{p,q\;\;0,1;\;0,1}\left[\begin{matrix}x\\ \\ y\end{matrix}\left|\begin{matrix}((ap,1));((bq,1))\\ ;(0,1)\\ ;(0,1)\end{matrix}\right.\right] $$

हमें

$$ \int_0^1 x^{\lambda}(1-x^2)^{-1/2\mu}P_\nu^\mu(x)\;{}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1\ldots a_p\\ b_1\ldots b_q\end{matrix};(a+bx^{2n})\right]dx $$

$$ =(2n)^{\mu-1}\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j)}\;A^{*p,0;\;0,1;\;2n,1}_{p,q;\;0,1;\;2n,2n+1}\left[\begin{matrix}a\\ \\ b\end{matrix}\left|\begin{matrix}((ap,1));((bq,1))\\ (0,1)\\ ((\phi_{2n},1));(0,1)((\psi_{2n},1))\end{matrix}\right.\right] $$

प्राप्त होगा जिसमें

$$ \phi_{k+1}=\frac{1-\lambda+2k}{2n},\;\phi_{k+n+1}=\frac{2k-\lambda}{2n},\;\psi_{k+1}=\frac{\nu+\mu-\lambda+2k}{2n},\;\psi_{k+n+1}=\frac{\mu-\lambda-\nu-1+2k}{2n} $$

$k=0, 1, \ldots n-1$, $R(1-\mu)>0$, $R(\lambda+1)>0$, $R(b_j)>0$, $j=1.\ldots q$, $|0|<1$, $|a+b|<1$

(*c*) $p_1=m_1=2$, $q=0$, $p_2=m_2=0$, $n_2=1$, $q_2=2$, $p_3=q_3=m_3=n_3=0$ रखने पर तथा सूत्र

$$ A^{*2,0;\;0,1;\;0,0}_{2,0;\;\;2;\;0,0}\left[\begin{matrix}-\dfrac{a^2}{b^2}\\ \\ \dfrac{4}{p^2b^2}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\alpha,1)(\beta,1);\\ :(0,1)(-\sigma,1)\\ ;\end{matrix}\right.\right]=\frac{(b)^{\alpha+\beta}(p)^{\alpha+\beta-\sigma}}{a^{\sigma}\;(2)^{\alpha+\beta-\sigma-1}}\;K^{(bp)}_{\alpha-\beta}\,I_v(ap) $$

का उपयोग करने पर थोड़े से सरलीकरण के पश्चात् निम्नांकित फल मिलेगा :

$$ \int_0^1 x^{\lambda-1}(1-x^2)^{-1/2\mu}\;P_\nu^\mu(x)\;k_\rho(ax^{-n})I_\sigma(\beta x^{-\eta})\;dx $$

$$= \frac{(\beta)^{\sigma}(2n)^{\mu-1}}{2^{\sigma-1}} A^{*2,0;\ 0,1;\ 2n,0}_{2,0;\ 0,2;\ 2n,2n} \left[\begin{matrix} -\frac{\beta^2}{a^2} \\ \frac{4}{a^2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\rho/2,1)(-\rho/2,1) \\ ;(0,1)|(\sigma,1) \\ ((\phi_{2n},1));((\psi_{2n},1)) \end{matrix} \right]$$

$R(1-\mu)>0,\ R(a)>|R(\beta)|$

(*d*) यदि $m_1=p_1=0=q_1$ तो

$$\int_0^1 x^{\lambda}(1-x^2)^{-1/2\mu} P_{\nu}^{\mu}(x)\, H^{n_2m_2}_{p_2q_2}\left[a \middle| \begin{matrix} ((ep_2\gamma p_2)) \\ ((ep_3\lambda p_3)) \end{matrix}\right] H^{n_3m_3}_{p_3q_3}\left[bx^{2n} \middle| \begin{matrix} ((ep_3\lambda p_3)) \\ ((fq_3\mu q_3)) \end{matrix}\right] dx$$

$$=(2n)^{\mu-1} A^{*0,0;\ m_2n_2;\ m_3+2n,n_3}_{0,0;\ p_2q_2;\ p_3+2n,\ q_3+2n} \left[\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ; \\ ((cp_2\gamma p_2));((dq_2\delta q_2)) \\ ((\phi_{2n},1))((ep_3\lambda p_3));((fq_3\mu q_3))((\psi_{2n},1)) \end{matrix} \right]$$

जहाँ

$$2(m_2+n_2)>p_2+q_2 \quad |\arg a|<(m_2+n_2-\tfrac{1}{2}p_2-\tfrac{1}{2}q_2)\pi$$

$$2(m_3+n_3)>p_3+q_3 \quad |\arg b|<(m_3+n_3+\tfrac{1}{2}p_3-\tfrac{1}{2}q_3)\pi$$

$$\phi_{k+1}=\frac{1-\lambda+2k}{3n},\ \phi_{k+n+1}=\frac{2k-\lambda}{2n},\ \phi_{k+1}=\frac{\nu+\mu-\lambda+2k}{2n},\ \psi_{k+n+1}=\frac{\mu-\lambda-\nu-1+2k}{2n}$$

$k=0,1,\ldots n-1;\quad R(1-\mu)>0,\quad R(\lambda+2nfi+1)>0\ \ i=1\ldots n_3$

(d_1) यदि $m_2=0=m_3=p_2=p_3,\ n_2=1=n_3,\ q_2=q_3=2,\ c_1=0=\rho_1,\ \gamma_1=1=\lambda_1,\ d_1=-\phi_1$ $\delta_1=\theta_1, f_1=-\phi_2,\ \mu_2=\theta_2$

$$\int_0^1 x^{\lambda}(1-x^2)^{-1/2\mu} P_{\nu}^{\mu}(x)\ \mathcal{J}^{\theta_1}_{\phi_1}(a)\ \mathcal{J}^{\theta_2}_{\phi_2}(bx^{2n})\ dx$$

$$=(2n)^{\mu-1} A^{*0,0;0,1;\ 2n,1}_{0,0;\ 0,2;\ 2n,2n+2} \left[\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ; \\ ;(0,1)(-\phi_1,\theta_1) \\ ((\phi_{2n},1));((0,1)(\psi_{2n},1))(-\phi_2,\theta_2) \end{matrix} \right]$$

(d_2) यदि हम (*d*) में $n_2=n_3=1,\ m_2=p_2,\ q_2+1,\ m_3=p_3,\ q_3=q_3+1$ लिखें तो

$$\int_0^1 x^{\lambda}(1-x^2)^{-1/2\mu} P_{\nu}^{\mu}(x)\ {}_{p_2}\Psi_{q_2}\left[\begin{matrix} ((1-cp_2,\ \gamma p_2)) \\ ((1-dq_2,\ \delta q_2)) \end{matrix};-a\right] {}_{p_3}\Psi_{q_3}\left[\begin{matrix} ((1-ep_3,\lambda p_3)) \\ ((1-fq_3,\mu q_3)) \end{matrix};-bx^{2n}\right] dx$$

$$=(2n)^{\mu-1} A^{0,0;\ p_2,1;\ p_3+2n,1}_{0,0;\ p_2,q_2+1;\ p_3+2n,q_3+1}\left[\begin{array}{c|l} a & ; \\ & ((cp_2\gamma p_2;\ (1,1)((dq_2\delta q_2)) \\ b & ((\psi_{2n},\ 1))((ep_3\lambda p_3));\ (1,1)((\psi_{2n},1))((fq_3\mu q_3)) \end{array}\right]$$

(d_3) यदि (d) में हम $m_2=1=m_3=n_2=n_3=p_2=p_3=q_2=q_3$ $c_1=1-\phi_1$, $e_1=1-\phi_2$, $\gamma_1=\theta_1$, $\lambda_1=\theta_2$, $d_1=f_1=0$, $\delta_1=1=\mu_1$ $0<\theta_1, \theta_2<1$ रखें तो

$$\int_0^1 x^\lambda(1-x^2)^{-1/2\mu} P_\nu^\mu(x)\ G_{\phi_1}^{\theta_1}(a)\ G_{\phi_2}^{\theta_2}(bx^{2n})\ dx$$

$$=\theta_1\theta_2(2n)^{\mu-1} A^{*0,0;\ 1,1;\ 2n+1,\ 1,}_{0,0;\ 1,1;\ 2n+1,2n+1}\left[\begin{array}{c|l} a & ; \\ & (1-\phi_1,\ \theta_1);\ (0,\ 1) \\ b & (1-\phi_2,\ \theta_2)((\psi_{2n},\ 1));\ (0,\ 1)((\psi_{2n},\ 1)) \end{array}\right]$$

निर्देश

1. भट्ट, आर० सी० । Le Mathematics, 1966, XXI, Fase I, 6-10.
2. एर्डेल्यी, ए० । Higher Transcendental functions. **भाग 1**, **मैकग्राहिल**, 1953.
3. सरन, एस० । Nieuw Archief Voor wiskunde, 1965, (3)XIII, 226-229.
4. शर्मा, बी० एल० । Mathematica Y fisica Teorica, 1967, XVII, 67-78.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 1, January, 1973, Pages 47-66

विस्तारित फाक्स के H-फलनों से सम्बद्ध कुछ परिणाम तथा उनके सम्प्रयोग

मणिलाल शाह
गणित विभाग, पी० एम० बी० जी० सांइस कालेज, इंदौर

[प्राप्त—मार्च 25, 1972]

सारांश

मैकराबर्ट के E, माइजर के $\bar{G}$ तथा फाक्स के H-फलनों के प्रमेय में आने वाले परिणामों को विस्तृत करने के उद्देश्य से कतिपय सान्त समाकलों का मान निकाला गया है। ये हैं :

$$\text{(i)} \int_{-1}^{1} (1+\mu)^{\sigma-1} (1-\mu)^{\rho-1} H \begin{bmatrix} x\left(\frac{1-u}{2}\right) \\ y\left(\frac{1-u}{2}\right) \end{bmatrix} du,$$

$$\text{(ii)} \int_{-1}^{1} (1+\mu)^{\sigma-1} (1-\mu)^{\rho-1} {}_PF_Q \begin{bmatrix} A_P ; \\ B_Q \lambda \end{bmatrix} \left(\frac{1+\mu}{2}\right)^h \left(\frac{1-u}{2}\right)^v \Bigg] \begin{bmatrix} x\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \\ y\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \end{bmatrix} du$$

तथा

$$\text{(iii)} \int_{-1}^{1} (1+\mu)^{\beta} (1-\mu)^{\rho} P_l^{(\alpha, \beta)} (\mu) H \begin{bmatrix} x\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^h \\ y\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \end{bmatrix} du$$

जो अग्रवाल तथा माथुर के $H\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ के रूप में h के धन पूर्ण संख्यक मानों के लिए हैं।

इन समाकलों का उपयोग करते हुए हमने दो चरों वाले फाक्स के H फ़लनों के लिए परिणाम स्थापित किये हैं जो (i) सान्त श्रेणी के संकलन (ii) जैकोबी बहुपदियों की श्रेणी में प्रसार सूत्र तथा (iii) आवर्ती सम्बन्ध के विषय में हैं। प्राचलों के विशिष्टीकरण से इन परिणामों से विशिष्ट दशाओं के

अनेक सार्वीकरण प्राप्त होते हैं। इनमें से कुछ ज्ञात हैं तो कुछ नवीन हैं और रोचक हैं और विशुद्ध एवं सम्प्रयुक्त गणित की कतिपय समस्याओं के विश्लेषण में उपयोगी हो सकते हैं।

Abstract

Some results associated with extended Fox's H-functions and their applications *By* Manilal Shah, Department of Mathematics, P.M. B. G. Science College, Indore.

In an attempt to give extensions of certain results in the theory of MacRobert's E, Meijer's G and Fox's H-functions, we evaluate here some finite integrals :

$$\text{(i)} \quad \int_{-1}^{1} (1+u)^{\sigma-1}(1-u)^{\rho-1} H \begin{bmatrix} x\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \\ y\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \end{bmatrix} du,$$

$$\text{(ii)} \quad \int_{-1}^{1} (1+u)^{\sigma-1}(1-u)^{\rho-1} {}_pF_Q \begin{bmatrix} A_P ; \\ B_Q \lambda \end{bmatrix} \left(\frac{1+u}{2}\right)^{\mu}\left(\frac{1-u}{2}\right)^{\nu} \Bigg] H \begin{bmatrix} x\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \\ y\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \end{bmatrix} du$$

and

$$\text{(iii)} \quad \int_{-1}^{1} (1+u)^{\beta}(1-u)^{\rho} P_l^{(\alpha,\beta)}(u) H \begin{bmatrix} x\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \\ y\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \end{bmatrix} du$$

for positive integral values of h, in terms of Agarwal and Mathur's $H\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

By using these integrals, we establish the results for Fox's H-functions of two variables on (i) summation of a finite series, (ii) expansion-formula in series of Jacobi polynomials and (iii) recurrence relation. On specialization of the parameters, these results yield many generalizations of particular cases, some of which are known and others are believed to be new, interesting and may prove to be useful in the analysis of certain problems of mathematics, both pure and applied, and in mathematical physics. The double-intergral-expansion analogues for one of these results are derived which lead to extensions of some recent results.

1. भूमिका : दो चरों वाला सार्वीकृत फाक्स का H-फलन

हाल ही में अग्रवाल तथा माथुर [(1), p. 536] ने फाक्स के H-फलन [(5), p. 408] का विस्तार दो चरों में द्विगुण मेलिन-बार्नीज कंटूर समाकल की सहायता से निम्न रूप में प्रस्तुत किया है :

$$H\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \equiv H^{n,\,\nu_1,\,\nu_2,\,m_1,\,m_2}_{p,\,[t\,:\,t'],\,s,\,[q\,:\,q']}\left[\begin{array}{c|c} & \{(\epsilon_p,\, e_p)\} \\ x & \{(\gamma_t,\, c_t)\};\; \{(\gamma'_{t'},\, c'_{t'})\} \\ y & \{(\delta_s,\, d_s)\} \\ & \{(\beta_q,\, b_q)\};\; \{(\beta'_{q'},\, b'_{q'})\} \end{array}\right] \tag{1·1}$$

$$=\frac{1}{(2\pi_1)^2}\int_{L_1}\int_{L_2} \Phi(\xi+\eta)\,\psi(\xi,\,\eta)\,x^{\xi}\,y^{\eta}\,d\xi\,d\eta,$$

जहाँ

(i) $\{(\epsilon_p,\, e_p)\}$ से p प्राचलों $(\epsilon_1,\, e_1),\, (\epsilon_2,\, e_2),\, \ldots,\, (\epsilon_n,\, e_n);\, (\epsilon_{n+1},\, e_{n+1}),\, \ldots,\, (\epsilon_p,\, e_p)$ का वोध होता है।

इसी प्रकार $\{(\gamma_t, c_t)\}, \{(\gamma'_{t'}, c'_{t'})\}$ के लिए तथा अन्यों के लिये मानना होगा।

(ii) यदि सभी e, c इत्यादि धन पूर्ण संख्याएँ >0 हों तथा $0 \leqslant n \leqslant p,\, 0 \leqslant \nu_1 \leqslant t, \leqslant \nu_2 \leqslant t'$, $0 \leqslant m_1 \leqslant q,\, 0 \leqslant m_2 \leqslant q'$;

(iii) L_1 तथा L_2 उपयुक्त कंटूर हैं ;

(iv)

$$\Phi(\xi+\eta)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(1-\epsilon_j+e_j\xi+e_j\eta)}{\prod\limits_{j=n+1}^{p}\Gamma(\epsilon_j-e_j\xi-e_j\eta)\prod\limits_{j=1}^{s}\Gamma(\delta_j+d_j\xi+d_j\eta)},$$

$$\psi(\xi,\,\eta)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{\nu_1}\Gamma(\gamma_j+c_j\xi)\prod\limits_{j=1}^{m_1}\Gamma(\beta_j-b_j\xi)\prod\limits_{j=1}^{\nu_2}\Gamma(\gamma'_j+c'_j\eta)\prod\limits_{j=1}^{m_2}\Gamma(\beta'_j-b'_j\eta)}{\prod\limits_{j=\nu_1+1}^{t}\Gamma(1-\gamma_j-c_j\xi)\prod\limits_{j=m_1+1}^{q}\Gamma(1-\beta_j+b_j\xi)\prod\limits_{j=\nu_2+1}^{t'}\Gamma(1-\gamma'_j-c'_j\eta)\prod\limits_{j=m_2+1}^{q'}\Gamma(1-\beta'_j+b'_j\eta)}.$$

यदि

$$\left\{\begin{array}{l} 2(n+\nu_1+m_1)>p+s+t+q, \\ 2(n+\nu_2+m_2)>p+s+t'+q', \\ |\arg(x)|<[n+\nu_1+m_1-\frac{1}{2}(p+s+t+q)]\pi, \\ |\arg(y)|<[n+\nu_2+m_2-\frac{1}{2}(p+s+t'+q')]\pi \end{array}\right. \tag{1·2}$$

या

$p+t<s+q, p+t'<s+q'$, या फिर $p+t=s+q, p+t'=s+q'$ तथा $|x|<1, |y|<1$. तो द्विगुण समाकल (1·1) अभिसारी होगा ।

$H\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right]$. **की कुछ विशिष्ट दशायें**

(1·1) में $p=s=n=0$, रखने पर फाक्स के दो H-फलनों का गुणनफल प्राप्त होगा ।

$$H^{0,\ \nu_1,\ \nu_2,\ m_1,\ m_2}_{0,\ [t\ :\ t'],\ 0,\ [q\ :\ q']}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\begin{matrix} - \\ \{(\gamma_t, c_t)\}; \{(\gamma'_{t'}, c'_{t'})\} \\ - \\ \{(\beta_q, b_q)\}; \{(\beta'_{q'}, b'_{q'})\} \end{matrix}\right] \tag{1·3}$$

$$=H^{m_1,\ \nu_1}_{t,\ q}\left[x\middle|\begin{matrix} \{(1-\gamma_t, c_t)\} \\ \{(\beta_q, b_q)\} \end{matrix}\right] H^{m_2,\ \nu_2}_{t',\ q'}\left[y\middle|\begin{matrix} \{(1-\gamma'_{t'}, c'_{t'})\} \\ \{(\beta'_{q'}, b'_{q'})\} \end{matrix}\right], (q\geqslant t, q'\geqslant t').$$

यदि (1·1) में प्राचलों को उपयुक्त रीति से रखा जाय तो यह

$$\lim_{y\to 0} H^{p,\ \nu_1,\ 0,\ m_1,}_{p,\ [t\ :\ 0],\ s,\ [q\ :\ 1]}\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \{(\epsilon_p, e_p)\} \\ \{(\gamma_t, c_t)\}; - \\ \{(\delta_s, d_s)\} \\ \{(\beta_q, b_q)\}; 0 \end{matrix}\right] \tag{1·4}$$

$$=H^{m_1,\ p+\nu_1}_{p+t,\ s+q}\left[x\middle|\begin{matrix} \{(\epsilon_p, c_p)\}, \{(1-\gamma_t, c_t)\} \\ \{\beta_q, b_q)\}, \{(1-\delta_s, d_s)\} \end{matrix}\right], (s+q\geqslant p+t).$$

रूप में परिणत हो जाता है ।

इस शोधपत्र में पहले हम दो तर्कों के द्वारा विस्तारित फाक्स के H-फलनों वाले तीन सान्त समाकलों का मान ज्ञात करेंगे। इनमें से पहले तथा तीसरे समाकल को समाकलन क्रम को बदलकर और फिर ज्ञात सूत्रों द्वारा पदशः समाकलन के द्वारा व्युत्पन्न किया गया है। प्रथम समाकल को सान्त अन्तर-आपरेटर का उपयोग करते हुये सार्वीकृत करके एक दूसरा समाकल प्राप्त किया गया है। इन समाकलों का उपयोग दो चरों वाले विस्तारित H-फलनों को व्युत्पन्न करने के लिये प्रयुक्त किया गया है जो (i) सान्त श्रेणी के संकलन, (ii) जैकोबी बहुपदियों की श्रेणी में प्रसार सूत्र तथा (iii) आवर्ती सम्बन्ध के विषय में हैं। यह देखा जाता है कि लेखक के कुछ नवीन सूत्रों [(8), (9)] से रोचक विस्तार प्राप्त होते हैं। इन फलनों के लिए द्विगुण समाकल प्रसार अनुरूपों से सम्बन्धित कुछ परिणाम भी दिए गये हैं जो लेखक [(10)] के कुछ नवीन सूत्रों का सार्वीकरण प्रस्तुत करते हैं।

2. सामान्य समाकल

हम निम्नांकित समाकलों का मान ज्ञात करेंगे।

प्रथम समाकल :

$$\int_{-1}^{1} (1+u)^{\sigma-1}(1-u)^{\rho-1} H\begin{bmatrix} x\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \\ y\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \end{bmatrix} du \tag{2·1}$$

$$=\frac{2^{\rho+\sigma-1}\Gamma(\sigma)}{h^\sigma} H^{n+h,\ \nu_1,\ \nu_2,\ m_1,\ m_2}_{p+h,\ [t\,:\,t'],\ s+h,\ [q\,:\,q']}\left[\begin{array}{c|c} & \triangle(h, 1-\rho), \{(\epsilon_p, e_p)\} \\ x & \{(\gamma_t, c_t)\}\,;\,\{(\gamma'_{t'}, c'_{t'})\} \\ y & \{(\delta_s, d_s)\}, \triangle(h, \sigma+\rho) \\ & \{(\beta_q, b_q)\};\,\{(\beta'_{q'}, b'_{q'})\} \end{array}\right]$$

जहाँ कि अभिसरण के लिए

$$\text{(i)}\quad \begin{cases} Re\,(\sigma)>0,\ h \text{ ऐसी धन पूर्ण संख्या है जो 0 से अधिक है और} \\ p+q+s+t<2(m_1+\nu_1+n), \\ p+q'+s+t'<2(m_2+\nu_2+n), \\ |\arg(x)|<[m_1+\nu_1+n-\frac{1}{2}(p+q+s+t)]\pi, \\ |\arg(y)|<[m_2+\nu_2+n-\frac{1}{2}(p+q'+s+t')]\pi, \\ Re\left[\rho+h\left(\frac{\beta_j}{b_j}\right)+h\left(\frac{\beta'_i}{b'_i}\right)\right]>0,\ j=1, 2, \ldots, m_1;\ i=1, 2, \ldots, m_2. \end{cases}$$

या

(ii) $\begin{cases} p+t<s+q,\ p+t'<s+q' \\ \text{या फिर } p+t=s+q,\ p+t'=s+q' \text{ के साथ} \mid x\mid<1, \mid y\mid<1, \\ Re\left[\rho+h\left(\frac{\beta_j}{b_j}\right)+h\left(\frac{\beta'_i}{b'_i}\right)\right]>0, j=1, 2, \ldots, m_1; i=1, 2, \ldots m_2. \end{cases}$

$\triangle(m, n)$ संकेत से m-प्राचलों के सेट का संक्षिप्तीकरण किया गया है :

$$\frac{n}{m}, \frac{n+1}{m}, \ldots, \frac{n+m-1}{m}.$$

द्वितीय समाकल :

$$\int_{-1}^{1} (1+u)^{\sigma-1}(1-u)^{\rho-1}\ {}_PF_Q\left[\begin{matrix}A_P \\ B_Q\end{matrix}; \lambda\left(\frac{1+u}{2}\right)^{\mu}\left(\frac{1-u}{2}\right)^{\lambda}\right] H\left[\begin{matrix} x\left(\frac{1-u}{2}\right)^{h} \\ y\left(\frac{1-u}{2}\right)^{h}\end{matrix}\right] du \quad (2\cdot2)$$

$$=\frac{2^{\rho+\sigma-1}}{h^{\sigma}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{P} (A_j)_r\, \lambda^r\, \Gamma(\sigma+\mu_r)}{r!\, \prod_{j=1}^{Q}(B_j)_r\, h^{\mu r}}$$

$$H^{h+n,\ \nu_1,\ \nu_2,\ m_1,\ m_2}_{p+h,\ [t\ :\ t'],\ s+h,\ [q\ :\ q']}\left[\begin{matrix}\triangle(h, 1-\rho-\nu_r), \{(\epsilon_p, e_p)\} \\ \{(\gamma_t, c_t)\}; \{(\gamma'_{t'}, c'_{t'})\} \\ \{(\delta_s, d_s)\}, \triangle[h, \rho+\sigma+\nu_r+\mu_r] \\ \{(\beta_q, b_q)\}; \{(\beta'_{q'}, b'_{q'})\}\end{matrix}\right]$$

जो उन परिस्थितियों के अन्तर्गत जो (2·1) के लिए हैं, लागू है, साथ में अन्य परिस्थतियाँ भी :

(i) μ तथा ν को अनृणात्मक पूर्ण संख्याएँ होना चाहिए किन्तु दोनों को शून्य नहीं होना चाहिए;

(ii) $p \leqslant Q+1$, तथा जैसा कि अन्य हाइपरज्यामितीय फलनों में होता है हर प्राचलों में से एक भी प्राचल को ऋण संख्या या शून्य नहीं होने दिया जाता। $A_P(B_Q)$ के द्वारा $P(Q)$ प्राचल समूह A_1, A_2, ..., $A_P(B_1, B_2, \ldots, B_Q)$ व्यक्त होता है।

तृतीय समाकल :

$$\int_{-1}^{1} (1+u)^{\beta} (1-u)^{\rho} P\, P_l^{(\alpha,\, \beta)}(u)\, H\begin{bmatrix} x\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \\ y\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \end{bmatrix} du \tag{2·3}$$

$$= \frac{2^{\rho+\beta+1}(-1)^l \Gamma(\beta+l+1)}{l!\quad h^{\beta \cdot 1}}$$

$$H^{n+2h,\, \nu_1,\, \nu_2,\, m_1,\, m_2}_{p+2h,\, [t\,:\,t'],\, s+2h,\, [q\,:\,q']} \left[\begin{array}{c|c} x & \triangle(h, -\rho),\ \triangle(h, \alpha-\rho),\ \{(\epsilon_p, e_p)\} \\ & \{\gamma_t, c_t)\};\ \{\gamma'_{t'}, c'_{t'})\} \\ y & \{(\delta_s, d_s)\},\ \triangle(h, \beta+l+\rho+2),\ \triangle(h, -\alpha-l+\rho+1) \\ & \{(\beta_q, b_q)\};\ \{(\beta'_{q'}, b'_{q'})\} \end{array}\right]$$

(1·2) में कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत मान्य है जिसमें $Re\,(\beta) > -1$ तथा

$$Re\left[\rho + h\left(\frac{\beta_j}{b_j}\right) + h\left(\frac{\beta'_i}{b'_i}\right)\right] > -1,\ j=1, 2, \ldots, m_1;\ i=1, 2, \ldots, m_2,$$ तथा h धन संख्या >0

(2·1) **की उपपत्ति :**

(2·1) के समाकल्य में (1·1) से $H\begin{bmatrix} x\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \\ y\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \end{bmatrix}$ का मान रखने पर और फिर समाकलन के क्रम को बदल देने पर

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1}\int_{L_2} \Phi(\xi+\eta)\, \psi(\xi, \eta)\, x^{\xi} y^{\eta} \left\{ \int_{-1}^{1} \left(\frac{1+u}{2}\right)^{\sigma-1} \left(\frac{1-u}{2}\right)^{\rho+h\xi+h\eta-1} du \right\} d\xi\, d\eta.$$

समाकल क्रम में ऐसा परिवर्तन विहित है क्योंकि आन्तरिक u-समाकल पूर्णतः अभिसारी होता है यदि

$$Re\ (\sigma) > 0,\ Re\left[\rho + h\left(\frac{\beta_j}{b_j}\right) + h\left(\frac{\beta'_i}{b'_i}\right)\right] > 0,\ j=1, 2, \ldots, m_1;\ i=1, 2, \ldots, m_2.$$

(1·2) में दिए गये प्रतिबन्धों के अनुसार द्विगुण कंटूर संख्यायें अभिसारी हैं और पुनरावृत्त समाकल का अभिसरण (2·1) के समाकल से अनुसरित होता है अतः दे ला वाल्ली पूसिन के प्रमेय [(2), p. 504] द्वारा समाकलन क्रम के विनिमय को आसानी के वैध माना जा सकता है

अब एक ज्ञात परिणाम [(7), p. 31, ex. 7] के उपयोग निकालेंगे ।

$$\int_{-1}^{1}(1+x)^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=2^{p+q-1}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ Re\ (p)>0,\ Re\ (q)>0,$$

तथा गुणन सूत्र [(6), p. 11, (1)] द्वारा आन्तरिक समाकल का मान निकालने पर

$$\Gamma(mz)=(2\pi)^{1/2(1-m)}m^{mz-1/2}\prod_{r=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{r}{m}\right),\ m=2,3,\ldots,$$

हमें निम्न फल प्राप्त होता है.

$$\frac{2\Gamma(\sigma)}{h^{\sigma}}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\Phi\ (\xi+\eta)\psi(\xi,\eta)\ \frac{\prod_{i=0}^{h-1}\Gamma\left(\frac{\rho+i}{h}+\xi+\eta\right)}{\prod_{i=0}^{h-1}\Gamma\left(\frac{\rho+\sigma+i}{h}+\xi+\eta\right)}x^{\xi}y^{\eta}\,d\xi\,d\eta. \qquad (2\cdot4)$$

यहाँ पर ξ-तल पर कंटूर L_1 एक ऋजु रेखा है जो काल्पनिक अक्ष के साथ $-i\infty$ से $i\infty$ तक विस्तृत है, जिसमें दंतुरता है और यदि आवश्यकता हुई तो $\Gamma(\beta_j-b_j\xi), j=1,2,\ldots,m_1$ के पोल इसके दाईं ओर रहें। $\Gamma(\gamma_j+c_j\xi), j=1,2,\ldots,\nu_1, \Gamma(1-\epsilon_j+e_j\xi+e_j\eta), j=1,2,\ldots,n,$

और $\Gamma\left(\frac{\rho+i}{h}+\xi+\eta\right),\quad \{i=0,1,2,\ldots,(h-1)\}$ के बाईं ओर रहें।

इसी प्रकार η-तल पर कंटूर L_2 अपने लूपों के साथ $-i\infty$ से $i\infty$ तक जाता है और आवश्यकता हुई तो $\Gamma(\beta'_j-b'_j\eta), j=1,2,\ldots,m_2$ के पोल दाईं ओर और $\Gamma(\gamma'_j+c'_j\eta), j=1,2,\ldots,\nu_2$, $\Gamma(1-\epsilon_j+e_j\xi+e_j\eta), j=1,2,\ldots,n$ तथा $\Gamma\left(\frac{\rho+i}{h}+\xi+\eta\right),\ \{i=0,1,2,\ldots,(h-1)\}$ के पोल कंटूर के पोल कंटूर के बाईं ओर रहें।

अन्त में, (2·1) परिणाम (1·1) के बल पर (2·4) से निकलता है।

समाकल (2·3) को व्युत्पन्न करने के लिये ज्ञात समाकल [(4), p. 284, (2)]

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\rho}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx$$

$$=\frac{2^{\beta+\rho+1}\Gamma(\rho+1)\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha-\rho+n)}{n!\ \ \Gamma(\alpha-\rho)\Gamma(\beta+\rho+n+2)},\ Re\ \rho>-1,\ Re\ \beta>-1,$$

का उपयोग तथा (2·1) की उपपत्ति की विधि का अनुसरण किया जाता है।

(2·2) **की उपपत्ति :**

हम समाकल (2·1) पर विचार करेंगे । (2·1) में दोनों ओर

$$\left[\prod_{j=1}^{p} \Gamma(A_j+k) \Big/ \prod_{j=1}^{\rho} \Gamma(\beta_j+k)\right] \lambda^k$$

से गुणा करने पर तथा $\exp\,(\overset{\nu}{E}_\rho \overset{\mu}{E}_\sigma E_k)$ को

$$\exp\,(\overset{\nu}{E}_\rho \overset{\mu}{E}_\alpha E_k) \int_{-1}^{1} \left(\frac{1+u}{2}\right)^{\sigma-1} \left(\frac{1-u}{2}\right)^{\rho-1} H\left[\begin{matrix} x\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^h \\ y\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \end{matrix}\right] \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(A_j+k)\lambda^k}{\prod_{j=1}^{\rho} \Gamma(B_j+k)}\, d\mu$$

$$= \exp\,(\overset{\nu}{E}_\rho \overset{\mu}{E}_\sigma E_k) \left\{ \frac{2\Gamma(\sigma)}{h^\sigma} \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(A_j+k)\lambda^k}{\prod_{j=1}^{\rho} \Gamma(B_j+k)} \right\}$$

$$H^{n+h,\ \nu_1,\ \nu_2,\ m_1,\ m_2}_{p+h,\ [t\ :\ t'],\ s+h,\ [q\ :\ q']} \left[\begin{matrix} x \\ \\ y \\ \\ \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \triangle(h,\ 1-\rho),\ \{(\epsilon_p,\ e_p)\} \\ \{(\gamma_t,\ c_t)\};\ \{(\gamma'_{t'},\ c'_{t'})\} \\ \{(\delta_s,\ d_s)\},\ \triangle(h,\ \rho+\sigma) \\ \{(\beta_q,\ b_q)\};\ \{(\beta'_{q'},\ b'_{q'})\} \end{matrix} \right]. \qquad (2·5)$$

सान्त अन्तर-आपरेटर E को जो

$$E_\alpha f(\alpha) = f(\alpha+1),$$

$$\overset{\nu}{E}_\alpha f(\alpha) = f(\alpha+\nu),$$

द्वारा पारिभाषित है, (2·5) में सम्प्रयुक्त करने पर बाईं ओर समाकलन एवं संकलन के क्रम को बदल देने पर

$$\sum_{r=0}^{\infty} \int_{-1}^{1} \left(\frac{1+u}{2}\right)^{\sigma-1} \left(\frac{1-u}{2}\right)^{\rho-1} H\left[\begin{matrix} x\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^h \\ y\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \end{matrix}\right]$$

$$\left\{ \frac{\prod_{j=1}^{P} \Gamma(A_j+k+r)\lambda^{k+r} \left(\frac{1+u}{2}\right)^{\mu r} \left(\frac{1-u}{2}\right)^{\nu r}}{r!\prod_{j=1}^{Q} \Gamma(B_j+k+r)} \right\} du$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2\prod_{j=1}^{P} \Gamma(A_j+k+r)\lambda^{k+r}\Gamma(\sigma+\mu^r)}{r!\prod_{j=1}^{Q} \Gamma(B_j+k+r)\, h^{\sigma+\mu r}}$$

$$H^{n+h,\nu_1,\nu_2,m_1m_2}_{p+h,[t:t'],s+h,[q:q']} \left[\begin{array}{c|c} x & \triangle(h, 1-\rho-\nu r), \{(\epsilon_p, e_p)\} \\ & \{(\gamma_t, c_t)\},; \{(\gamma'_{t'}, c'_{t'})\} \\ y & \{(\delta_s, d_s)\}, \triangle(h, \rho+\sigma+\gamma r+\mu r) \\ & \{(\beta_q, b_q)\}; \{(\beta'_{q'}, b'_{q'})\} \end{array} \right] \qquad (2\cdot6)$$

चूंकि उपपत्ति में समाकलन एवं संकलन निहित हैं अतः इसका समर्थन करने के लिये हम निम्न प्रकार से प्रदर्शित करेंगे :

$${}_PF_Q \left[\begin{matrix} A_1, \ldots, A_P \\ B_1, \ldots, B_Q \end{matrix}; \lambda\left(\frac{1+u}{2}\right)^{\mu}\left(\frac{1-u}{2}\right)^{\nu} \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \omega_m(u);$$

$$\omega_m(u) = \frac{\prod_{j=1}^{P} (A_j)_m \lambda^m \left(\frac{1+u}{2}\right)^{\mu m} \left(\frac{1-u}{2}\right)^{\nu m}}{m!\prod_{j=1}^{Q} (B_j)_m}, \; P \leqslant Q+1$$

तथा

$$F(u) = \left(\frac{1+u}{2}\right)^{\sigma-1} \left(\frac{1-u}{2}\right)^{\rho-1} H \left[\begin{matrix} x\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \\ y\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \end{matrix} \right].$$

शोध के फलस्वरूप निम्नांकित प्रेक्षण प्राप्त हुए :

(i) $\omega_0(u), \omega_1(u), \ldots$, विवृत अन्तराल $(-1, 1)$ में शतत हैं ;

(ii) $\sum_{m=0}^{\infty} \omega_m(u)$ $(-1, 1)$ में समरूप से अभिसारी है यदि $P \leqslant Q+1$ तथा कोई भी हर प्राचल B_j शून्य या ऋण संख्या नहीं होने दिया जाता ;

(iii) $F(u)$ की $(-1, 1)$ में ज्ञात संख्या में अनिश्चित असंततताएँ हैं तथा

(iv) $\int_{-1}^{1} F(u)\, du$ (2·1) में वर्णित प्रतिबन्धों की दृष्टि से परम अभिसारी है ।

अतः कार्सेला [(3), p. 173] के अनुसार (2·6) में समाकलन तथा संकलन के क्रम का विनिमय विहित है ।

अतः (2·6) में $\Gamma(a+n)=(a)_n\Gamma(a)$ सूत्र का प्रयोग करने पर तथा A_j+k और B_j+k के स्थान पर A_j तथा B_j रखने पर हमें (2·2) की प्राप्ति होती है ।

विशिष्ट दशायें :

(i) (2·1)--(2·3) में $p=n=s=0$, रखने से दो चरों वाले विस्तारित H-फलनों के रूप में फाक्स के दो H-फलनों का गुणनफल सम्बन्धी परिणाम प्राप्त किया जा सकता है ।

(ii) (2·1) में प्राचलों के विशिष्टीकरण द्वारा तथा (1·4) के सम्प्रयोग से फाक्स का H-फलन सम्बन्धी परिणाम प्राप्त होता है जो समस्त b, c तथा h के इकाई होने पर और $\frac{1-u}{2}$ के स्थान पर z रखने पर एक ज्ञात परिणाम [(4), p. 417, (1)] में रूपान्तरित हो जाता है ।

3. संकलन सूत्र

हम दो चरों वाले फाक्स के H-फलन की सान्त श्रेणी के योग को (2·2) तथा (2·3) के परिणामों के आधार पर ज्ञात करने का प्रयास करेंगे ।

(2·2), में $P=2$, $Q=1$, $\lambda=\nu=1$, $\mu=0$, $A_1=-l$, $A_2=l+\alpha+\beta+1$, $B_1=1+\alpha$ इत्यादि रखने पर तथा दोनों ओर $\frac{(1+\alpha)_l}{l!}$, से गुणा करके, जैकोबी बहुपदी [(6), p. 274, (2)], की परिभाषा का उपयोग करने पर हमें एक रोचक परिणाम प्राप्त होता है :

$$\int_{-1}^{1} (1+u)^{\sigma-1}(1-u)^{\rho-1} P_l^{(\alpha,\, \beta)}(\mu)\, H\left[\begin{matrix} x\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \\ y\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \end{matrix}\right] du \tag{3·1}$$

$$=\frac{2^{\rho+\sigma-1}(1+a)_l\Gamma(\sigma)}{h^\sigma}\sum_{r=0}^{l}\frac{(-1)^r(l+a+\beta+1)_r}{r!\,(1+a)_r(l-r)!}$$

$$H^{n+h,\ \nu_1,\ \nu_2,\ m_1,\ m_2}_{p+h,\ [t\ :\ t'],\ s+h,\ [q\ :\ q']}\left[\begin{array}{c|c} x & \triangle(h,\ 1-\rho-r),\ \{(\epsilon_p,\ e_p)\} \\ & \{(\gamma_t,\ c_t)\};\ \{(\gamma'_{t'},\ c'_{t'})\} \\ y & \{(\delta_s,\ d_s)\},\ \triangle(h,\ \rho+\sigma+r) \\ & \{(\beta_q,\ b_q)\};\ \{(\beta'_{q'},\ b'_{q'})\} \end{array}\right]$$

जहाँ अभिसरण के लिये मान्य प्रतिबन्धों के समूह में (1·2), तथा $Re\ (\sigma)>0$ सम्मिलित हैं

$Re\left[\rho+h\left(\frac{\beta j}{b_j}\right)+h\left(\frac{\beta'_i}{b'_i}\right)\right]>0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m_1;\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ m_2$, तथा h एक धनपूर्णांक है।

(2·3) को दृष्टिगत रखते हुये, (3·1) के प्राचलों को समंजित करने पर तथा उनके दायें पक्षों को सन्तुलित करने पर हमें वांछित संकलन सूत्र प्राप्त होता है जो निम्न प्रकार है :

$$H^{n+2h,\ \nu_1,\ \nu_2,\ m_1,\ m_2}_{p+2h,\ [t\ :\ t'],\ s+2h,\ [q\ :\ q']}\left[\begin{array}{c|c} x & \triangle(h,\ -\rho),\ \triangle(h,\ a-\rho),\ \{(\epsilon_p,\ e_p)\} \\ & \{(\gamma_t,\ c_t)\};\ \{\gamma'_{t'},\ c'_{t'})\} \\ y & \{(\delta_s,\ d_s)\},\ \triangle(h,\ \beta+\rho+l+2),\ \triangle(h,\ -a-l+\rho+1) \\ & \{(\beta_q,\ a_q)\};\ \{(\beta'_{q'},\ b'_{q'})\} \end{array}\right] \tag{3·2}$$

$$=\frac{(-1)^l\ l!\ (1+a)_l}{(1+\beta)_l}\sum_{r=0}^{l}\frac{(-1)^r(l+a+\beta+1)_r}{r!\ (l-r)!\ (1+a)_r}$$

$$H^{n+h,\ \nu_1,\ \nu_2,\ m_1,\ m_2}_{p+h,\ [t\ :\ t'],\ s+h,\ [q\ :\ q']}\left[\begin{array}{c|c} x & \triangle(h,\ -r+\rho),\ \{(\epsilon_p,\ e_p)\} \\ & \{\gamma_t,\ c_t)\};\ \{(\gamma'_{t'},\ c'_{t'})\} \\ y & \{(\delta_s,\ d_s)\},\ \triangle(h,\ \beta+\rho+r+2) \\ & \{(\beta_q,\ b_q)\};\ \{(\beta'_{q'},\ b'_{q'})\} \end{array}\right]$$

यदि h धन पूर्णांक >0 है तथा

$$\text{(i)}\quad\begin{cases} p+q+s+t<2(m_1+\nu_1+n), \\ p+q'+s+t'<2(m_2+\nu_2+n), \\ |\arg\ (x)|<[m_1+\nu_1+n-\frac{1}{2}(p+q+s+t)]\,\pi, \\ |\arg\ (y)|<[m_2+\nu_2+n-\frac{1}{2}(p+q'+s+t')]\,\pi \end{cases}$$

या

(ii) $\begin{cases} p+t<s+q,\ p+t'<s+q', \\ \text{या फिर } p+t=s=q,\ p+t'=s+q', \text{ साथ में } |x|<1,\ |y|<1. \end{cases}$

विशिष्ट दशायें :

यदि हम (3·2) में प्राचलों का विशिष्टीकरण करें तो फाक्स के H-फलन का संगत संकलन सूत्र निम्न रूप में प्राप्त होता है :

$$H^{m_1,\ \nu_1+2h}_{t+2h,\ q+2h}\left[x\left|\begin{matrix}\Delta(h,-\rho),\ \Delta(h,-\rho+\alpha),\ \{(\gamma_t,c_t)\} \\ \{(\beta,b_q)\},\ \Delta(h,-\beta-l-\rho-1),\ \Delta(h,-\rho+\alpha+l)\end{matrix}\right.\right] \tag{3·3}$$

$$=\frac{(-1)^l\, l!\,(1+\alpha)_l}{(1+\beta)_l}\sum_{r=0}^{l}\frac{(-1)^r(\alpha+\beta+l+1)_r}{r!\,(l-r)!\,(1+\alpha)_r}$$

$$H^{m_1,\ \nu_1+h}_{t+h,\ q+h}\left[x\left|\begin{matrix}\Delta(h,-r+\rho),\ \{(\gamma_t,c_t)\} \\ \{(\beta_q,b_q)\},\ \Delta(h,-\beta-\rho-r-1)\end{matrix}\right.\right]$$

जिसमें मान्यता के प्रतिबन्धों की व्याख्या (3·2) द्वारा समुचित परिवर्तनों के साथ हो जाती है।

4. प्रसार सूत्र

इस अनुभाग में जैकोबी बहुपदियों की श्रेणी में दो चरों वाले फाक्स के कलन का प्रसार सूत्र स्थापित करेंगे जिसमें (2·3) तथा जैकोबी बहुपदियों के लाम्बिकता गुण का उपयोग किया जावेगा।

यदि औपचारिक रूप से मान लें कि

$$f(u)\equiv(1-u)^\rho H\left[\begin{matrix}x\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \\ y\left(\frac{1-u}{2}\right)^h\end{matrix}\right]=\sum_{\xi=0}^{\infty}M_\xi\, P_\xi^{(\alpha,\beta)}(u),\ (-1<\mu<1), \tag{4·1}$$

जहाँ $f(u)$ परिबद्ध अन्तराल $-1\leqslant u\leqslant 1$ में शतत है और इसका खंडशः शतत व्युत्पन्न है तो $\alpha>-1$, $\beta>-1$ होने पर $f(\mu)$ से सम्बद्ध जैकोबी श्रेणी (4·1) शतत रूप से $-1+\epsilon\leqslant u\leqslant 1-\epsilon,\ 0<\epsilon<1$ में $f(u)$ में अभिसारी होती है।

हम M_ξ को (4·1) से अत्यन्त औपचारिक ढंग से प्राप्त करेंगे। दोनों ओर $(1-u)^\alpha(1+u)^\beta$ $P_l^{(\alpha,\beta)}(u)$ से गुणा करके तथा -1 से 1 के बीच समाकलित करते हैं।

(4·1) से निम्नांकित की प्राप्ति होगी :

$$\int_{-1}^{1} (1-u)^{\rho+\alpha} (1+u)^{\beta} P_l^{(\alpha,\beta)}(u)\; H\begin{bmatrix} x\left(\frac{1-u}{2}\right)^{h} \\ y\left(\frac{1-u}{2}\right)^{h} \end{bmatrix} du \tag{4·2}$$

$$= \sum_{\xi=0}^{\infty} M_\xi \int_{-1}^{1} (1-u)^{\alpha} (1+u)^{\beta} P_l^{(\alpha,\beta)}(u)\, P_\xi^{(\alpha,\beta)}(u)\, du,\; Re\,(\alpha) > -1,\; Re\,(\beta) > -1.$$

(4·2) में दाईं ओर के सभी समाकल एक पद को छोड़कर, जिसमें $\xi = l$, लुप्त हो जाते हैं ।

अतः
$$M_l = (h_l)^{-1} \int_{-1}^{1} (1-u)^{\rho+\alpha} (1+u)^{\beta} P_l^{(\alpha,\beta)}(u)\; H\begin{bmatrix} x\left(\frac{1-u}{2}\right)^{h} \\ y\left(\frac{1-u}{2}\right)^{h} \end{bmatrix} du \tag{4·3}$$

जहाँ h_l का मान जैकोबी के बहुपदियों [(6), p. 276, (22)] के लाम्बिकता-गुण द्वारा दिया जाता है :

$$\int_{-1}^{1} (1-u)^{\alpha} (1+u)^{\beta} P_l^{(\alpha,\beta)}(u)\, P_\xi^{(\alpha,\beta)}(u)\, du = h_l \delta_{l\xi},\; Re\,(\alpha) > -1,\; Re\,(\beta) > -1$$

तथा
$$h_l = \frac{2^{\lambda} \Gamma(l+\alpha+1)\Gamma(l+\beta+1)}{(2l+\lambda)\Gamma(l+\lambda)\, l!},\; \lambda = \alpha+\beta+1;$$

तथा $\delta_{l\xi}$ क्रोनकर डेल्टा फलन है । अर्थात्

$$\delta_{l\xi} = 0 \text{ यदि } \xi \neq l$$
$$= 1 \text{ यदि } \xi = l.$$

अब (2·3) की सहायता से (4·3) का समाकल निकालने पर

$$M_l = \frac{2^{\rho}(-1)^l (\alpha+\beta+2l+1)\Gamma(\alpha+\beta+l+1)}{h^{\beta+1}\Gamma(\alpha+l+1)} \tag{4·4}$$

$$H^{n+2h,\, \nu_1,\, \nu_2,\, m_1,\, m_2}_{p+2h,\, [t\,:\,t'],\, s+2h,\, [q\,:\,q']} \left[\begin{array}{c|c} x & \begin{array}{c} \triangle(h, -\rho-\alpha),\, \triangle(h, -\rho),\, \{(\epsilon_p, e_p)\} \\ \{(\gamma_t, c_t)\};\, \{(\gamma'_{t'}, c'_{t'})\} \\ \{(\delta_s, d_s)\},\, \triangle(h, \beta+l+\alpha+\rho+2), \\ \triangle(h, \rho-l+1), \\ \{(\beta_q, b_q)\};\, \{(\beta'_{q'}, b'_{q'})\} \end{array} \\ y & \end{array} \right].$$

(4·1) में (4·4) से M_ξ का मान रखने पर हमें प्रसार सूत्र प्राप्त होता है :

$$\left(\frac{1-u}{2}\right)^{\rho} H^{n,\ \nu_1,\ \nu_2,\ m_1,\ m_2}_{p,\ [t\ :\ t'],\ s,\ [q\ :\ q']}\left[\begin{array}{c|c} x\left(\frac{1-u}{2}\right)^{h} & \{(\epsilon_p,\ e_p)\} \\ & \{(\gamma_t,\ c_t)\};\ \{(\gamma'_t,\ c'_t)\} \\ y\left(\frac{1-u}{2}\right)^{h} & \{(\delta_s,\ d_s)\} \\ & \{\beta_q,\ b_q)\};\ \{(\beta'_q,\ b'_q)\} \end{array}\right] \tag{4·5}$$

$$=\frac{1}{h\beta^{+1}}\sum_{\xi=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\xi}\,(\alpha+\beta+2\xi+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+\xi+1)}{\Gamma(\alpha+\xi+1)}$$

$$H^{n+2h,\ \nu_1,\ \nu_2,\ m_1,\ m_2}_{p+2h,\ [t\ :\ t'],\ s+2h,\ [q\ :\ q']}\left[\begin{array}{c|c} & \triangle(h,\ -\alpha-\rho),\ \triangle(h,\ -\rho),\ \{(\epsilon_p,\ e_p)\} \\ x & \{(\gamma_t,\ c_t)\};\ \{(\gamma'_t,\ c'_t)\} \\ y & \{(\delta_s,\ d_s)\},\ \triangle(h,\ \alpha+\beta+\rho+\xi+2),\ \triangle(h,\ \rho-\xi+1) \\ & \{(\beta_q,\ b_q)\};\ \{(\beta'_q,\ b'_q)\} \end{array}\right] P_{\xi}^{(\alpha,\ \beta)}(u).$$

मान्यता के लिये प्रतिबन्ध इस प्रकार हैं :

h धनपूर्णांक है >0, $-1<u<1$, $Re\ (\alpha)>-1$, $Re\ (\beta)>-1$, $Re\ (\rho)>0$ तथा

(i)
$$\begin{cases} 2(n+\nu_1+m_1)>p+s+t+q, \\ 2(n+\nu_2+m_2)>p+s+t'+q', \\ |\arg(x)|<[n+\nu_1+m_1-\frac{1}{2}(p+s+t+q)]\,\pi, \\ |\arg(y)|<[n+\nu_2+m_2-\frac{1}{2}(p+s+t'+q')]\,\pi \end{cases}$$

या

(ii) $p+t<s+q$, $p+t'<s+q'$
या फिर $p+t=s+q$, $p+t'=s+q'$ साथ ही $|x|<1$, $|y|<1$.

एक अन्य रोचक प्रसार है :

$$\left(\frac{1-u}{2}\right)^{\rho} H^{m_1,\ \nu_1}_{t,\ q}\left[x\left(\frac{1-u}{2}\right)^{h}\,\middle|\,\begin{array}{c}\{(\gamma_t,\ c_t)\}\\ \{(\beta_q,\ b_q)\}\end{array}\right] \tag{4·6}$$

$$=\frac{1}{h\beta^{+1}}\sum_{\xi=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\xi}\,(\alpha+\beta+2\xi+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+\xi+1)}{\Gamma(\alpha+\xi+1)}$$

$$H^{m_1, \nu_1+2h}_{t+2h, q+2h}\left[x \left| \begin{matrix} \triangle(h, -\alpha-\rho), \triangle(h, -\rho)\{\gamma_t, c_t)\} \\ \{(\beta_q, b_q)\}, \triangle(h, -\beta-\alpha-\rho-\xi-1) \\ \triangle(h, -\rho+\xi) \end{matrix}\right.\right] P^{(\alpha, \beta)}_{\xi}(u)$$

जो (1·4) को दृष्टिगत रखते हुये (4·5) से प्राप्त किया जाता है और (4·5) में दिये गये प्रतिबन्ध-समूह द्वारा आसानी से निगमित हो सकता है।

इससे लेखक [(10), p. 7 (3·2)] द्वारा हाल ही में प्राप्त ज्ञात परिणाम की प्राप्ति होती है जिसमें $\frac{1-u}{2}$ को x द्वारा प्रतिस्थापित कर देते हैं और सभी b तथा c एक के बराबर होते है।

5. आवर्ती सम्बन्ध

अब हम विस्तारित फाक्स के H-फलनों के लिए आवर्ती सूत्र की प्राप्ति दो तर्कों के बल पर (2·3) का तथा जैकोबी बहुपदियों के ज्ञात आवर्ती सम्बन्ध का उपयोग करते हुये करेंगे।

हम ज्ञात सम्बन्ध [(7), p. 265, (15)]

$$\alpha+\beta+2l)\ P^{(\alpha-1,\ \beta)}(u) = (\alpha+\beta+l)\ P^{(\alpha,\ \beta)}_{l}(u) - (\beta+l)\ P^{(\alpha,\ \beta)}_{l-1}(u). \qquad (5·1)$$

से प्रारम्भ करेंगे। इसमें दोनों ओर

$(1-u)^\rho (1+u)^\beta\ H\left[\begin{matrix} x\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \\ y\left(\frac{1-n}{2}\right)^h \end{matrix}\right]$ से गुणा करने पर तथा μ के प्रति -1 से 1 तक समाकलित करने पर

$$(\alpha+\beta+2l)\int_{-1}^{1}(1-u)^\rho(1+u)^\beta P^{(\alpha-1,\ \beta)}(u)\ H\left[\begin{matrix} x\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \\ y\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \end{matrix}\right] du \qquad (5·2)$$

$$=(\alpha+\beta+l)\int_{-1}^{1}(1-u)^\rho(1+u)^\beta P^{(\alpha,\ \beta)}_{l}(u)\ H\left[\begin{matrix} x\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \\ y\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \end{matrix}\right] du$$

$$-(\beta+l)\int_{-1}^{1}(1-u)^\rho(1+u)^\beta\ P^{(\alpha,\ \beta)}_{l\ 1}(u)\ H\left[\begin{matrix} x\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \\ y\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \end{matrix}\right] du.$$

अब (2·3) की सहायता से (5·2) में निहित समाकलों की विवेचना करने पर हमें आवर्ती सम्बन्ध प्राप्त होता है जिसका रूप

$$(\alpha+\beta+2l)\, H^{n+2h,\ \nu_1,\ \nu_2,\ m_1,\ m_2}_{p+2h,\ [t\ :\ t'],\ s+2h,\ [q\ :\ q']}\left[\begin{array}{c|c} & \triangle(h,\ -\rho),\ \triangle(h,\ -\rho-1+\alpha),\ \{(\epsilon_p,\ e_p)\} \\ x & \{(\gamma_t,\ c_t)\};\ \{\gamma'_{t'},c'_{t'})\} \\ y & \{(\delta_s,\ d_s)\};\ \triangle(h,\ \rho+\beta+l+2)\},\ \triangle(h,\ -\alpha-l+\rho+2) \\ & \{(\beta_q,\ b_q)\};\ \{(\beta'_{q'},\ b'_{q'})\} \end{array}\right] \tag{5·3}$$

$$=(\alpha+\beta+l)\, H^{n+2h,\ \nu_1,\ \nu_2\ m_1,\ m_2}_{p+2h,\ [t\ :\ t'],\ s+2h,\ [q\ :\ q']}\left[\begin{array}{c|c} & \triangle(h,\ -\rho),\ \triangle(h,\ -\rho+\alpha),\ \{(\epsilon_p,\ e_p)\} \\ x & \{(\gamma_t,\ c_t)\};\ \{(\gamma'_{t'},\ c'_{t'})\} \\ y & \{(\delta_s\ d_s)\},\ \triangle(h,\ 1-\alpha-l+\rho),\ \triangle(h,\ \beta+l+\rho+2) \\ & \{(\beta_q,\ b_q)\};\ \{(\beta'_{q'},\ b'_{q'})\} \end{array}\right]$$

$$+l\ H^{n+2h,\ \nu_1,\ \nu_2,\ m_1,\ m_2}_{p+2h,\ [t\ :\ t'],\ s+2h,\ [q\ :\ q']}\left[\begin{array}{c|c} & \triangle(h,\ -\rho),\ \triangle(h,\ -\rho+\alpha),\ \{(\epsilon_p,\ e_p)\} \\ x & \{(\gamma_t,\ c_t)\};\ \{\gamma'_{t'},\ c'_{t'})\} \\ y & \{(\delta_s,\ d_s)\},\ \triangle(h,\ \beta+l+\rho+1),\ \triangle(h,\ -\alpha-l-\rho+2) \\ & \{\beta_q,\ b_q)\};\ \{(\beta'_{q'},\ b'_{q'})\} \end{array}\right].$$

उपर्युक्त सम्बन्ध $Re\ (\beta)>-1$ के लिए तथा नीचे दिए गए प्रतिबन्धों के लिये वैध है :

$$\text{(i)}\quad \begin{cases} 2(n+\nu_1+m_1)>p+s+t+q, \\ 2(n+\nu_2+m_2)>p+s+t'+q', \\ |\arg(x)|>[n+\nu_1+m_1-\frac{1}{2}(p+s+t+q)]\pi, \\ |\arg(y)|>[n+\nu_2+m_2-\frac{1}{2}(p+s+t'+q')]\pi, \\ Re\ \left[\rho+h\left(\frac{\beta_j}{b_j}\right)+h\left(\frac{\beta_i}{b'_i}\right)\right]>-1, j=1,2,\ldots,m_1;\ i=1,2,\ldots,m_2 \end{cases}$$

या

$$\text{(ii)}\quad \begin{cases} p+t<s+q,\ p+t'<s+q' \\ \text{या फिर } p+t=s+q,\ p+t'=s+q' \text{ साथ ही } |x|<1,\ |y|<1, \\ Re\left[\rho+h\left(\frac{\beta_j}{b_j}\right)+h\left(\frac{\beta'_i}{b'_i}\right)\right]>-1, j=1,2,\ldots,m_1;\ i=1,2,\ldots m_2, \end{cases}$$

h धन पूर्णांक है जो शून्य से अधिक है ।

जब (1·4) को दृष्टि में रखते हुए (5·3) के प्राचलों का विशिष्टीकरण किया जाता है तो लेखक [(11), p. 5 (4·1)] द्वारा दी गई विशिष्ट दशा प्राप्त होती है ।

6. द्विगुण समाकल प्रसार अनुरूप

पिछले अनुभागों की विधि का अनुसरण करते हुये हम दो चरों वाले फाक्स के H-फलन के द्विगुण-समाकल-प्रसार अनुरूपों को सीधे व्युत्पन्न कर सकते हैं ।

द्विगुण-समाकल अनुरूप निम्न है :

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (1+u)^{\beta}(1-u)^{\rho}(1+v)^{\lambda}(1-v)^{\sigma} P_l^{(\alpha,\beta)}(u)\, P_m^{(\mu,\lambda)}(v) \tag{6·1}$$

$$H_{p,\,[t:t'],\,s,\,[q:q']}^{n,\,\nu_1,\,\nu_2,\,m_1,\,m_2}\left[\begin{matrix} x\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \\ \\ y\left(\frac{1-v}{2}\right)^k \end{matrix}\left|\begin{matrix} \{(\epsilon_p, e_p)\} \\ \{(\gamma_t, c_t)\};\ \{(\gamma'_{t'}, c'_{t'})\} \\ \{(\delta_s, d_s)\} \\ \{(\beta_q, b_q)\};\ \{\beta'_{q'}, b'_{q'})\} \end{matrix}\right.\right] du\, dv$$

$$=\frac{(-1)^{l+m}\Gamma(\beta+l+1)\,\Gamma(\lambda+m+1)}{l!\,m!\,\beta h^{+1}k^{\lambda+1}2^{-\lambda-\sigma-\beta-\rho-2}}\; H_{p,\,[t+2h\,:\,t'+2k],\,s,\,[q+2h\,:\,q'+2k]}^{n,\,\nu_1+2h,\,\nu_2+2k,\,m_1,\,m_2}$$

$$\left[\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\left|\begin{matrix} \{(\epsilon_p, e_p)\} \\ \triangle(h, \rho+1),\ \triangle(h, 1-\alpha+\rho),\ \{(\gamma_t, c_t)\};\ \triangle(k, \sigma+1),\ \triangle(k, 1-\mu+\sigma),\ \{(\gamma'_{t'}, c'_{t'})\} \\ \{(\delta_s, d_s)\} \\ \{(\beta_q, b_q)\},\ \triangle(h, (\alpha-\rho+l),\ \triangle(h, -\beta-\rho-l-1);\ \{(\beta'_{q'}, b'_{q'})\},\ \triangle(k, \mu-\sigma+m), \\ \triangle(k, -\lambda-\sigma-m+1) \end{matrix}\right.\right]$$

द्विगुण प्रसार अनुरूप निम्न है :

$$(1-u)^{\rho}(1-v)^{\sigma} H_{p,\,[t:t'],\,s,\,[q:q']}^{n,\,\nu_1,\,\nu_2,\,m_1,\,m_2}\left[\begin{matrix} x\left(\frac{1-u}{2}\right)^h \\ \\ y\left(\frac{1-v}{2}\right)^k \end{matrix}\left|\begin{matrix} \{(\epsilon_p, e_p)\} \\ \{\gamma_t, c_t)\};\ \{\gamma'_{t'}, c'_{t'})\} \\ \{\delta_s, d_s)\} \\ \{(\beta_q, b_q)\};\ \{(\beta'_{q'}, b'_{q'})\} \end{matrix}\right.\right] \tag{6·2}$$

$$=\frac{2^{\rho+\sigma}}{h^{\beta+1}k^{\lambda+1}}\sum_{\xi=0}^{\infty}\sum_{\eta=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\xi+\eta}(2\xi+\alpha+\beta+1)\Gamma(\xi+\alpha+\beta+1)(2\eta+\lambda+\mu+1)\Gamma(\eta+\lambda+\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\xi+1)\Gamma(\mu+\eta+1)}$$

$$P_{\xi}^{(\alpha,\beta)}(u)\,P_{\eta}^{(\mu,\lambda)}(v)\,H_{p,\,[t+2h\,:\,t'+2k],\,s,\,[q+2h\,:\,q'+2k]}^{n,\,\nu_1+2h,\,\nu_2+2k,\,m_1,\,m_2}$$

$$\left[\begin{array}{l|c} x & \{(\epsilon_p, e_p)\} \\ & \triangle(h, \alpha+\rho+1), \triangle(h, 1+\rho), \{(\gamma_t, c_t)\}; \triangle(k, \mu+\sigma+1), \triangle(k, 1+\sigma), \{(\gamma'_{t'}, c'_{t'})\} \\ y & \{(\delta_s, d_s)\} \\ & \{(\beta_q, b_q)\}, \triangle(h, -\rho+\xi), \triangle(h, -\beta-\rho-\alpha-\xi-1); \{\beta'_{q'}, b'_{q'})\}, \triangle(k, -\sigma+\eta), \\ & \triangle(k, -\lambda-\mu-\sigma-\eta-1) \end{array}\right]$$

यदि h, k धन पूर्णांक हों >0, $-1<u<1$, $-1<v<1$, $Re\,(\beta)>-1$, $Re\,(\lambda)>-1$ तथा वैधता के अन्य प्रतिबन्ध-समूह इस प्रकार हैं :

$$\text{(i)}\quad \begin{cases} 2(n+\nu_1+m_1)>p+s+t+q, \\ 2(n+\nu_2+m_2)>p+s+t'+q', \\ |\arg(x)|<[n+\nu_1+m_1-\frac{1}{2}(p+s+t+q)]\pi \\ |\arg(y)|<[n+\nu_2+m_2-\frac{1}{2}(p+s+t'+q')]\pi \\ Re\left[\rho+h\left(\frac{\beta j}{b_j}\right)\right]>-1,\ Re\left[\sigma+k\left(\frac{\beta'_i}{b'_i}\right)\right]>-1, \\ j=1, 2, \ldots, m_1;\ i=1, 2, \ldots, m_2 \end{cases}$$

या

$$\text{(ii)}\quad \begin{cases} p+t<s+q,\ p+t'<s+q', \\ \text{या फिर } p+t=s+q,\ p+t'=s+q' \text{ साथ ही } |x|<1, |y|<1 \\ Re\left[\rho+h\left(\frac{\beta j}{b_j}\right)\right]>-1,\ Re\left[\sigma+k\left(\frac{\beta'_i}{b'_i}\right)\right]>-1, \\ j=1, 2, \ldots m_1;\ i=1, 2, \ldots, m_2. \end{cases}$$

ये परिणाम क्रमशः हमारे पूर्व परिणामों (2·3) तथा (4·5) के समान हैं। इनसे लेखक [(10), pp. 9-10, (4·1) तथा (4·2)] द्वारा स्थापित सूत्रों का सार्वीकरण हो जाता है।

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० डी० तथा माथुर, ए० बी० । **प्रोसी० नेश० एके० साइंस (इंडिया)**, 1969 **पृष्ठ** 30 (**सारांश**)

2. ब्रामविच, टी० जे० आई० ए० । Theory of Infinite Series, **मैकमिलन, लन्दन,** 1926

3. कार्सला, एच० एस० । Introduction to the theory of Fourier's Series and Integrals, तृतीय संस्करण, 1930, डोबर पब्लिकेशन्स न्यूयार्क

4. एर्डेल्यी इत्यादि । Tables of Integral transforms, भाग II, मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1954

5. फाक्स, सी० । ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०, 1926, **98**, 395-429

6. ल्यूक, एल० युडेल । The Special Functions and their Approximations, भाग I, एकेडमिक प्रेस, न्यूयार्क, 1969

7. रेनविले, ई० डी०। Special Functions, मैकमिलन कम्पनी, न्यूयार्क 1960

8. शाह, मणिलाल। प्रोसी० नेश० एके० सांइस (इंडिया), 1967, **37A**, 79-96

9. वही । कमेंट० मैथ० युनि० सेंट पाल, 1970, **18**, 95-110

10. वही । मैथमैटिक्स स्टुडेण्ट्स (प्रकाशनाधीन)

11. वही । Ann. Polon, Math. (प्रकाशनाधीन)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 1, Jaunary, 1973, Pages 67-72

वामावर्त ऐस्पैराजीन तथा ग्लूटामिन से सिल्वर (I) थैलियम (I) लेड (II), मरकरी (II) तथा क्रोमियम (III) के कीलेटों का निर्माण एवं उनका स्थायित्व

रमेश चन्द्र तिवारी तथा मनहरन नाथ श्रीवास्तव
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—सितम्बर 26, 1972]

सारांश

वामावर्त ऐस्पैराजीन तथा ग्लूटामिन से सिल्वर (I), थैलियम (I), लेड (II), मरकरी (II) तथा क्रोमियम (III) के कीलेटों के निर्माण का अध्ययन विभवमापी विधि द्वारा किया गया है। 25° से० ताप और 0·1*M* आयनिक सान्द्रता (सोडियम परक्लोरेट) पर इनके स्थायित्व स्थिरांकों के निम्नलिखित मान प्राप्त हुए :

ऐस्पैराजिनेट कीलेट : Ag(I) log K_1 3·79, log K_2 3·37; Tl(I) log K 3.28; Pb(II) log K_1 4·93; Hg(II) log K_1 5·76, log K_2 5·00; Cr(III) log K_1 6·63, log K_2 5·47।

ग्लूटामिनेट कीलेट : Ag(I) log K_1 3·79, log K_2 3·35; Tl(I) log K 3·24; Pb(II) log K_1 4·92; Cr(III) log K_1 6·58, log K_2 5·47।

Abstract

Formation and stabilities of sliver(I) thallium (I), lead(II), mercury(II), and chromium (III) chelates of l-asparagine and l-glutamine. *By* R. C. Tewari and M. N. Srivastava, Chemistry Department, University of Allahabad, Allahabad.

The metal chelates of Ag (I), Tl (I), Pb (II), Hg (II) and Cr (III) formed with l-asparagine and *l*-glutamine have been studied potentiometrically. It is observed that in Ag (I), Tl (I) and Hg (II) chelate systems the solutions remain clear throughout, and for Tl (I) chelates N=1, where as for Ag (I) and Hg (II) chelates, N=2. But in Pb (II) and Cr (III) chelate systems precipitation occurs from ~ pH 6·5, and 6·0

respecticively, and before precipitation point $\bar{n}$ approaches a maximum value of 1 for Pb (II) chelates and ≈ 2 for Cr (III) chelates. Their respective stability constants in 0·1 *M* sodium perchlorate at 25°C are reported as:

Asparaginate chelates.

log K_1 3·79, log K_2 3·37 for Ag (I); log K 3·28 for Tl (I); log K_1 4·93 for Pb (II); log K_1 5·76, log K_2 5·00 for Hg (III); log K_1 6·63, log K_2 5·47 for Cr (III).

Glutaminate chelates.

log K_1 3·79, log K_2 3·35 for Ag (I); log K 3·24 for Tl (I); log K_1 4·92 for Pb (II); log K_1 6·58, log K_2 5·47 for Cr (III).

इस प्रयोगशाला से पूर्व प्रकाशित शोधपत्रों में सिंह तथा श्रीवास्तव[1] ने ऐस्पार्टिक तथा ग्लूटैमिक अम्लों से निर्मित कुछ धातु आयनों के कीलेटों का अध्ययन किया। ऐस्पैराजीन तथा ग्लूटामिन क्रमशः ऐस्पार्टिक तथा ग्लूटैमिक अम्लों के ऐमाइड व्युत्पन्न होते हैं। संदर्भों के सर्वेक्षण से प्रगट है कि ऐस्पैराजीन से निर्मित कुछ धातु आयनों के कीलेटों[2-6] के निर्माण का अध्ययन पहले भी किया गया है, और उनके स्थायित्व स्थिरांक सम्बन्धी आँकड़े भी उपलब्ध हैं, परन्तु ग्लूटामिन पर इस प्रकार का कोई कार्य नहीं किया गया है। एक पूर्ववर्ती सूचना[7] में हम ऐस्पैराजीन तथा ग्लूटामिन से निर्मित वैनेडियम (IV) मालिब्डेनम (IV) तथा टंगस्टन (VI) के कीलेटों का अध्ययन प्रस्तुत कर चुके हैं। प्रस्तुत शोधपत्र में ऐस्पैराजीन तथा ग्लूटामिन से सिल्वर (I), थैलियम (I), लेड (II), मरकरी (II), तथा क्रोमियम (III) के कीलेटों के निर्माण का अध्ययन है और उनके स्थायित्व स्थिरांकों का परिकलन दिया गया है। यह अध्ययन इर्विंग एवं रोसोटी[8] द्वारा संशोधित कैलविन[9] तथा बेरम[10] की पी-एच अनुमापन विधि द्वारा किया गया है।

प्रयोगात्मक

प्रयुक्त अभिकर्मक : *l*-ऐस्पराजीन (रीडेल), एल-ग्लूटामिन (मर्क), सिल्वर नाइट्रेट (अनालार बी० डी० एच०), थैलस सल्फेट (अनालार बी० डी० एच०), लेड नाइट्रेट (अनालार बी० डी० एच०) मरक्यूरिक क्लोराइड (अनालार बी० डी० एच०), क्रोमियम सल्फेट (मर्क), परक्लोरिक अम्ल (रीडेल), सोडियम परक्लोरेट (रीडेल), सोडियम हाइड्राक्साइड (मर्क) के विलयन कार्बन डाइ आक्साइड से मुक्त शुद्ध आसुत जल में बनाये गये तथा उनका मानकीकरण उपयुक्त मानक विधियों द्वारा किया गया। पी-एच के मापनों के लिए लीड्स-नार्थप का पी-एच मापी प्रयुक्त किया गया।

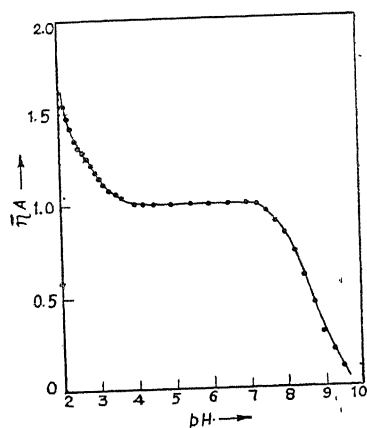
प्रक्रिया : निम्नलिखित मिश्रण तैयार किये गये और प्रत्येक का पूर्ण आयतन 50 मिली० रखा गया।

(अ) अम्ल (10 मिली० 0·5 *M* सोडियम परक्लोरेट तथा 10 मिली० 0·02 *M* परक्लोरिक अम्ल) (ब) लिगैंड (मिश्रण अ और 10 मिली० 0·02 *M* *l*-ऐस्पैराजीन अथवा *l*-ग्लूटामिन), (स) संकर

(मिश्रण ब और किसी धातु आयन के 0·01 M विलयन का 5 मिली०)। इस प्रकार प्रत्येक विलयन की आयनिक सान्द्रता 0·1 M सोडियम परक्लोरेट हुई। इन मिश्रणों का फिर अलग-अलग अनुमापन एक कार्बोनेट मुक्त मानक 0·2 M सोडियम हाइड्राक्साइड विलयन द्वारा पी-एच माप कर किया गया। सभी अनुमापन 25° से० पर एक जल जैकेट से युक्त मुद्रित पात्र में किये गये। अनुमापन के पूर्व तथा मध्य, कार्बन डाइग्राक्साइड से मुक्त करने के लिए मिश्रण विलयनों में शुद्ध नाइट्रोजन गैस प्रवाहित की गई। पी-एच अनुमापन वक्रों के पारस्परिक अंतरों से इर्विंग तथा रोसोटी के समीकरणों के द्वारा $\bar{n}_A$, n तथा pL की गणना की गई।

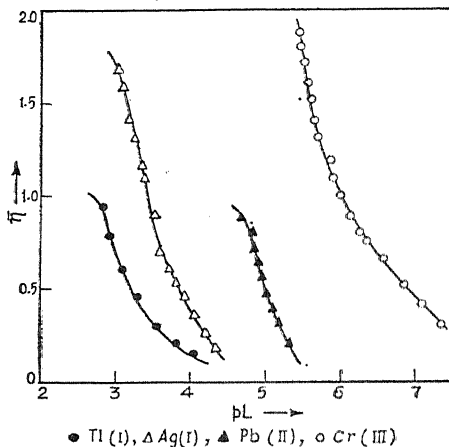
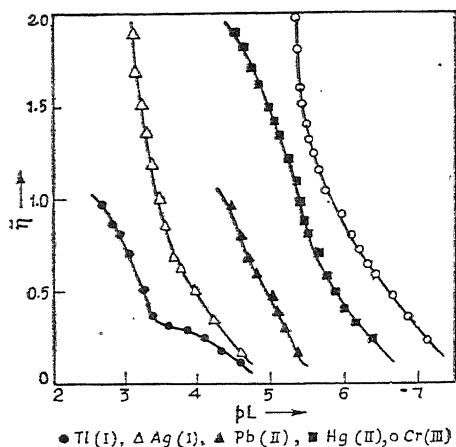
परिणाम तथा विवेचना

पी-एच अनुमापनों से प्रगट होता है कि Ag (I), Tl (I) तथा Hg (II) के निकायों में विलयन निरन्तर पूर्णत: निर्मल रहते हैं, परन्तु Pb (II) तथा Cr (III) के निकायों में क्षार की मात्रा बढ़ाने पर अवक्षेपण होने लगता है। यह अवक्षेपण Pb (II) के निकायों में $\sim$ 6·5 पी-एच पर तथा Cr (III) के निकायों में $\sim$ 6·0 पी-एच पर आरम्भ हो जाता है। इसके अतिरिक्त, लिगैंड तथा संकरों के विभिन्न पी-एच अनुमापन वक्रों के पारस्परिक अन्तर से यह स्पष्ट है कि कीलेटों के निर्माण में Ag (I) तथा Tl (I) से केवल एक प्रोटॉन मुक्त होता है, Hg (II) से कुल दो प्रोट्रॉन निकलते हैं, Pb (II) से कुल दो प्रोटॉन मुक्त होते प्रतीत होते है, परन्तु लगभग एक प्रोटॉन मुक्त होने के पश्चात् अवक्षेपण होने लगता है। इसी प्रकार क्रोमियम (III) से मुक्त प्रोटॉनों की कुल संख्या तो तीन प्रतीत होती है, परन्तु दो प्रोटॉन मुक्त होने के पश्चात् अवक्षेपण आरम्भ हो जाता है।

चित्र 1 में *l*-ऐस्पैराजीन के प्रोटॉन-लिगैंड संकर का निर्माण वक्र ($\bar{n}_A$ तथा pH के मध्य) प्रदर्शित है। *l*-ग्लूटामिन से भी लगभग वैसा ही निर्माण वक्र[11] प्राप्त होता है। इसके आधार पर इन लिगैंडों के प्रोटॉनीकरण स्थिरांकों की गणना की गई है और उनके मान आगे दिये जा रहे हैं :—

चित्र 1. *l*-ऐस्पैराजीन का प्रोटॉन-लिगैंड संकर निर्माण वक्र

l-ऐस्पैराजीन : $\log K_1H$ 8·70, $\log K_2H$ 2·16 तथा

l-ग्लूटामिन : $\log K_1H$ 8·91, $\log K_2H$ 2·21. ।

चित्र 2 **तथा** 3 में क्रमशः l-ऐस्पैराजीन तथा l ग्लूटामिन से बने कीलेटों के निर्माण वक्र ($\bar{n}$ तथा pL के मध्य) प्रदर्शित हैं। इस संदर्भ में यह उल्लेखनीय है कि $\bar{n}$ की गणना Pb (II) तथा Cr (III) के

चित्र 2. l-ऐस्पैराजिनेट कीलेटों के निर्माण वक्र

चित्र 3. l-ग्लूटामिनेट कीलेटों के निर्माण वक्र

निकायों में भी उन्हीं बिन्दुओं तक की गई है जहाँ तक विलयन पूर्णतः निर्मल थे। इस प्रकार इन निर्माण-वक्रों से स्पष्ट है कि Tl (I) के कीलेटों के लिए N का मान केवल एक है, जबकि Ag (I) तथा Hg (II) में N का मान दो है, अर्थात् Tl (I) से केवल एक कीलेट ML बनता है, जब कि Ag (I) तथा Hg (II) से दो कीलेट क्रमशः ML तथा ML_2 बनते है। Pb (II) के निकाय में भी अवक्षेपण के पूर्व $\bar{n}$ का अधिकतम मान केवल एक तक ही पहुँचता है, परन्तु Cr (III) के निकायों में इसका अधिकतम मान लगभग 2 तक पहुँचता है। अतएव Tl (I) तथा Pb (II) के कीलेटों के लिए केवल एक स्थायित्व स्थिरांक का परिकलन माध्यमान विधि द्वारा किया गया। परन्तु Ag (I), Hg (II) तथा Cr (III) के कीलेटों के दो दो स्थायित्व स्थिरांक, K_1 तथा K_2, परिकलित किये गये। निर्माण वक्रों के विश्लेषण से स्पष्ट है कि Ag (I) के कीलेटों में K_1/K_2 का अनुपात $\approx 10^{0.8}$ है, Hg (II) के कीलेटों में K_1/K_2 ≈ 10, तथा Cr (III) के कीलेटों में यह अनुपात लगभग $10^{1.2}$ है। अतः इन धातु आयनों की कीलेटों के स्थायित्व स्थिरांकों का परिकलन संशोधन पद तथा उत्तरोत्तर सन्निकटन विधियों द्वारा किया गया है। स्थायित्व स्थिरांकों के मान सारणी 1 में संग्रहीत हैं।

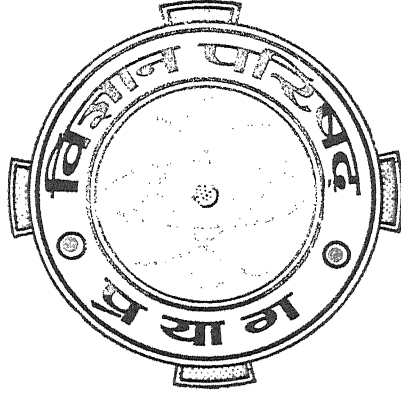
सारणी 1

l-ऐस्पैराजीन तथा *l*-ग्लूटामिन से निर्मित Ag (I), Tl (I), Pb (II), Hg (II) तथा Cr (III) के कीलेटों के स्थायित्व स्थिरांक

ताप 25° सें० μ=0·1 *M* सोडियम परक्लोरेट

धातु आयन	pH परिसर	परिकलन-विधि	ऐस्पैराजीन log K_1	ऐस्पैराजीन log K_2	ऐस्पैराजीन log β_n	ग्लूटामिन log K_1	ग्लूटामिन log K_2	ग्लूटामिन log β
Ag (I)	6·60—8·2	अर्द्ध n के मान	3·95	3·20	—	3·95	3·15	—
		संशोधन पद विधि	3·87	3·28	7·15	3·87	3·23	7·10
		उत्तरोत्तर सन्निकटन विधि	3·70	3·47	7·17	3·71	3·46	7·17
		माध्य मान	3·79	3·37	7·16	3·79	3·35	7·14
Tl (I)	6·6—8·5	अर्द्ध $\bar{n}$ का-मान	3·25	—	—	3·20	—	—
		माध्य मान	3·28	—	3·28	3·[illegible]4	—	3·24
Pb (II)	5·6—6·5	अर्द्ध [illegible] का मान	4·95	—	—	4·95	—	—
		माध्य मान	4·93	—	4·93	4·92	—	4·92
Hg (II)	4·0—7·0	अर्द्ध $\bar{n}$ के मान	5·85	4·90	—	*(निर्देश नं० 11)		
		संशोधन पद विधि	5·80	4·95	10·75			
		उत्तरोत्तर सन्निकटन विधि	5·71	5·05	10·76			
		माध्य मान	5·76	5·00	10·76			
Cr (III)	3·5—6·0	अर्द्ध $\bar{n}$ के मान	6·65	5·45	—	6·60	5·45	—
		संशोधन पद विधि	6·68	5·42	12·10	6·64	5·42	12·06
		उत्तरोत्तर सन्निकटन विधि	6·57	5·53	12·10	6·52	5·53	12·05
		माध्य मान	6·63	5·47	12·10	6·58	5·47	12·05

निर्देश

1. सिंह. एम० के० तथा श्रीवास्तव, एम० एन०। **जर्न० इनआर्गे० न्यूक्लि० केमि०**, 1972, **34**, 576, 2067, 2081; **तैलन्टा**, 1972, **19**, 699; **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1972, **15**, 61.
2. एलबर्ट, ए०। **बायो केमि० जर्न०**, 1950, **47**, 531.
3. टैनफोर्ड, जी० तथा शोर, डब्लू० एस०। **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1953, **75**, 8161.
4. शुब्र्ट, जे०। **वही**, 1954, **76**, 3442.
5. पेरिन, डी० डी०। **जर्न० केमि० सोसा०**, 1958, 3125; 1959 290.
6. ली० एन० सी० तथा डूडी, ई०। **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1958, **80**, 5901.
7. तिवारी, आर० सी० तथा श्रीवास्तव, एम० एन०। **टैलन्टा (प्रकाशनाधीन)**
8. इर्विंग, एच० तथा रोसोटी, एच० एस०। **जर्न० केमि० सोसा०**, 1953, 3397; 1954, 2904.
9. कैलविन, एम० तथा विल्सन, के० डब्लू०। **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1954, **67**, 2003.
10. बेरम, जे०। Metal ammine formation in aqueous solutions" **पी० हास एन्ड सन्स, कोपेनहैगेन**, 1942.
11. तिवारी, आर० सी० तथा श्रीवास्तव, एम० एन०। **जर्न० इनआर्गे० न्यूक्लि० केमि० (प्रकाशनाधीन)**

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

भाग 16 अप्रैल, 1973 संख्या 2

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 2, April 1973, Pages 73-87

संभाव्य कैंसर निरोधक औषधियों के लिए 2-ऐमिनो-1, 3, 4-थायडायजोल-व्युत्पन्नों का संश्लेषण

रवीन्द्र प्रताप राव तथा जगत नारायण सिंह
रसायन विभाग, गोरखपुर विश्वविद्यालय, गोरखपुर

[प्राप्त—अक्टूबर 10, 1972]

सारांश

इस शोध योजना में 2-ऐमिनो 1, 3, 4-थायडायज़ोल तथा सम्बन्धित यौगिकों के गुणों पर उनकी संरचना के प्रभावों का अध्ययन किया गया है। उनके विभिन्न व्युत्पन्न तैयार करने की विधियों का संक्षिप्त वर्णन भी दिया गया है।

Abstract

Synthesis of 2-amino-1, 3, 4-thiadiazole derivatives as potential anti-cancer agents. *By* Ravindra Pratap Rao and Jagat Narayan Singh, Chemistry Department, University of Gorakhpur, Gorakhpur.

Alkyl-(5-arylamino-1, 3, 4-thiadiazol-2-yl) sulphides have been prepared in good yields by the action of alkyl halides on the anions of 2-arylamino-5-mercapto-1, 3, 4-thiadiazoles. The sythesis of 2-arylamino-5-mercapto-1, 3, 4-thiadiazoles has been achieved by refluxing 4-arylthiosemicarbazides with carbon disulphide in dimethyl-formamide. The syntheses, properties and spectroscopic studies on these compounds have been presented. The low resolution mass spectra of the alkyl-(5-phenylamino-1, 3, 4-thiadiazol-2-yl) sulphides have been determined. The present study of spectra has been divided into two parts. The "high mass region" retains intact the elements of the heterocyclic ring and is very interesting since it results from reactions involving losses from the alkyl-thio-group. The "low mass region" is of little interest since it results from the fission of the heterocyclic ring. The mass spectrum of *n*-butyl-(5-phenylamino-1, 3, 4-thiadiazol-2-yl) sulphide is typical of other compounds and composition of some ions in its mass spectrum has been given.

थायडायज़ोलों और उनके व्युत्पन्नों में प्रतिजीवाणु[1-9], कवक नाशक[10-13] तथा शाकनाशक[14,15] सक्रियता पायी जाती है। दो थायडायज़ोल व्युत्पन्नों में ल्यूकीमिया-रोधक गुण बताए गए हैं[16]।

वे 2-ऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल (1) तथा 2-एथिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल (2) हैं, जो ल्यूकीमिया एल 1210 की वृद्धि को रोकते हैं। वे जीवन-अवधि की वृद्धि करने में ऐमिनोटेरिन के समान (लेकिन एमेथोप्टरिन से कम) प्रभावी हैं। निकोटिनामाइड, थायडायज़ोलों की ल्यूकीमिया-रोधक क्रिया तथा उनके विषैलेपन को नष्ट कर देता है। पात्रे थायडायज़ोल का विनिमय डाइफास्फोपिरिडीन न्यूक्लियोटाइड के निकोटिनामाइड खंड के साथ पाया जाता है, जिसके फलस्वरूप डाइफास्फोपिरिडीन न्यूक्लियोटाइड का थायडायज़ोल अनुरूप बनता है। C^{14} अंकित थायडायज़ोल चूहों के ऊतकों में सन्निविष्ट हो जाता है।

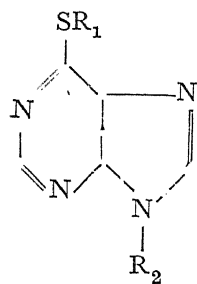
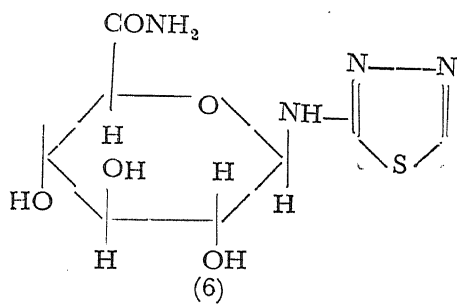
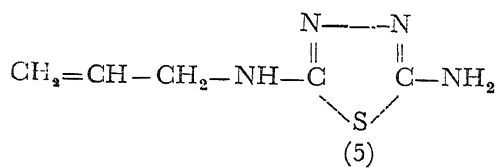
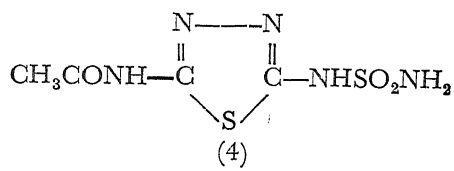
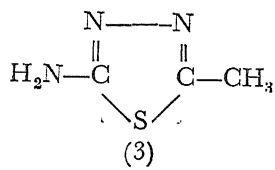
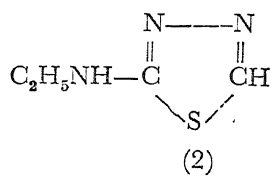
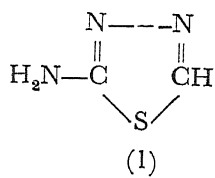
कुछ समय पूर्व ऐमिनोथायडायज़ोल व्युत्पन्नों के अर्बुदनाशक प्रभावों का मूल्यांकन किया गया है[17]। 2-ऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल (1), 2-ऐमिनो-5-मेथिल-1, 3, 4-थायडायज़ोल (3) तथा 2-ऐसीटिलऐमिनो 5-सल्फामाइडो-1, 3, 4-थायडायज़ोल (4) के प्रभावों का अध्ययन चूहों एवं चूहियों में प्रतिरोपित अर्बुदों पर किया गया।

2-ऐसीटिलऐमिनो-5-सल्फामाइडो 1, 3, 4-थायडायज़ोल (4) में चूहियों में प्रतिरोपित मेलेनोमा के सापेक्ष (अर्बुद वृद्धि का संदमन 31-73%) तथा चूहों में कार्सिनोमा के सापेक्ष (संदमन 34%) साधारण अर्बुदरोधक गुण पाए गए। 2-ऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल ने चूहों के साथ 5 मि० ग्रा०/कि० ग्रा० और चूहियों के साथ 10-15 मि०ग्रा० की मात्रा में, सार्कोमा-45 के साथ 70% संदमन तथा मेलेनोमा के साथ 42% संदमन प्रदर्शित किया। चूहिया के लसीका-सार्कोमा पर 2-ऐमिनो-5-मेथिल-1, 3, 4-थायडायज़ोल का कोई प्रभाव नहीं हुआ। सार्कोमा-45, मेलेनोमा तथा लसीका-सार्कोमा पर 2-ऐमिनो-5-मेथिल-1, 3, 4-थायडायज़ोल का प्रायोगिक रूप से कोई प्रभाव नहीं था।

आइसोनिकोटिनामाइड और उसके व्युत्पन्नों द्वारा 2-ऐमिनो थायडायज़ोलों के ल्यूकीमियारोधक प्रभावों का प्रबलीकरण बताया गया है[18]। आइसोनिकोटिनामाइड, 6-ऐमिनोपिकोलिनामाइड तथा विभिन्न निकोटिनामाइड व्युत्पन्न चूहे पर प्रतिरोपित ल्यूकीमिया के विरुद्ध सक्रियता बढ़ाने में सहायक सिद्ध हुए हैं। दोनों निकोटिनामाइड तथा निकोटिनिक अम्ल, आइसोनिकोटिनामाइड के संयोग में, 2-ऐमिनो 1, 3, 4-थायडायज़ोल की ल्यूकीमियारोधक सक्रियता को रोक देते हैं। न तो आइसोनिकोटिनिक अम्ल और न 6-ऐमिनोपिकोलिनिक अम्ल ही 2-ऐमिनो 1, 3, 4-थायडायज़ोल की ल्यूकीमियारोधक सक्रियता को बढ़ाने में सहायक हैं।

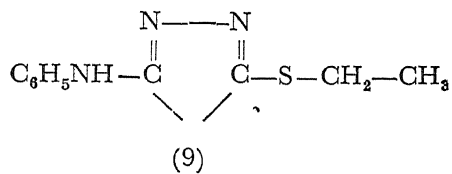
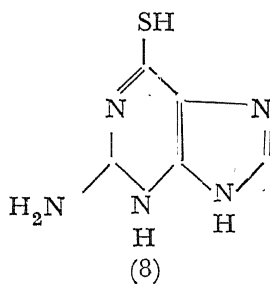
चुहियों में प्रतिरोपित सार्कोमा-180 और कार्सिनोमा-63 के विरुद्ध ऐलिलप्रतिस्थापित थायडायज़ोलों के वृद्धि संदमनी सक्रियता का अध्ययन किया गया है[19]। 2-डाइऐलिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल, 2-डाइऐलिलऐमिनो, 5-ऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल, 2-ऐलिलऐमिनो-5-ऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल (5) और 2-ऐलिलाक्सी-1, 3, 4-थायडायज़ोल संदमनी यौगिक हैं।

प्राय: यह देखा गया है कि अर्बुदरोधक यौगिकों में ऐलिल वर्ग बीटा-क्लोरोएथिल वर्ग या एथिलीनइमिनो वर्ग से कम प्रभावकारी है।

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (8)

(7क) $R_1 = H$; $R_2 = H$

(7ख) $R_1 = H$;

$R_2 = \beta - D -$ राइबोफ्यूरैनोस

(9)

N, *N'*-डाइएथिलीन-*N''*-एथिल-*N''*-(1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल) फास्फोरऐमाइड चूहों पर प्रतिरोपित अर्बुदों को नष्ट करने में सक्रिय है[20]। यह यौगिक 2-एथिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल हाइड्रोक्लोराइड से बनाया गया है।

1-डीऑक्सी-1-[(1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल) ऐमिनो] बीटा-डी-ग्लूकूरोनऐमाइड (6) एक अर्बुद रोधक औषधि के रूप में लाभदायक सिद्ध हुआ है[21]।

विभिन्न थायडायज़ोलों और उनके व्युत्पन्नों पर अल्प साहित्य उपलब्ध है[22]। यह शोध-योजना 2-ऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल और सम्बन्धित यौगिकों के गुणों पर उनकी संरचना के प्रभावों के अध्ययन से सम्बन्धित है। नीचे 2-ऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल, मरकैप्टो-1, 3, 4-थायडायज़ोल तथा उनके विभिन्न व्युत्पन्नों के तैयार करने की विधियों का संक्षिप्त वर्णन किया गया है।

प्रयोगात्मक

2-ऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल, एथिल आर्थोफार्मेट के साथ थायोसेमीकार्बाज़ाइड के संघनन से संश्लेषित किया गया है[23]। 2-नार्मल ब्यूटिलऐमिनो 5-मरकैप्टो-1, 3, 4-थायडायज़ोल, 2-नार्मल-हेक्सिलऐमिनो 5-मरकैप्टो-1, 3, 4-थायडायज़ोल, 2-बेंज़िलऐमिनो, 5-मरकैप्टो-1, 3, 4-थायडायज़ोल, 2-फेनिलऐमिनो 5-मरकैप्टो 1, 3, 4-थायडायज़ोल डाइमेथिलफार्मऐमाइड में कार्बन डाइसल्फाइड के साथ 4-प्रतिस्थापित थायोसेमीकार्बाज़ाइडों की क्रिया से तैयार किए गए हैं[24]।

2-फेनिल-5-मरकैप्टो-1, 3, 4-थायडायज़ोल ऐल्कोहली पोटैसियम हाइड्राक्साइड में एक तुल्यांक कार्बन डाइसल्फाइड के साथ थायोबेंजोइक अम्ल हाइड्राजाइड के पश्चवाहन से संश्लेषित किया गया है[25]।

2-ऐसिटऐमाइडो-5-मेथिल-1,3, 4-थायडायज़ोल ऐसीटिक अम्ल और ऐसीटिक ऐनहाइड्राइड के साथ थायोसेमीकार्बाजाइड का ऐसीटिलीकरण करने से प्राप्त ऐसीटिक व्युत्पन्न का संश्लेषण ऐसीटिक ऐनहाइड्राइड के साथ चक्रीयकरण द्वारा किया गया है[26]।

2-मरकैप्टो 5-प्रोपिलथायो-1, 3, 4-थायडायज़ोल, 2-मरकैप्टो-5-ब्यूटिलथायो-1, 3, 4-थायडायज़ोल, 2-मरकैप्टो-5-नार्मल-हेक्सिल-थायो-1, 3, 4-थायडायज़ोल, 2-मरकैप्टो-5-बेन्जिलथायो-1, 3, 4-थायडायज़ोल को क्रमशः प्रोपिल क्लोराइड, ब्यूटिल क्लोराइड, नार्मल-हेक्सिल क्लोराइड तथा बेंज़िल क्लोराइड के साथ 2, 5-डाइमरकैप्टो 1, 3, 4-थायडायज़ोल के जलीय ऐल्कोहली विलय का पश्चवाहन करके तैयार किया गया[24]।

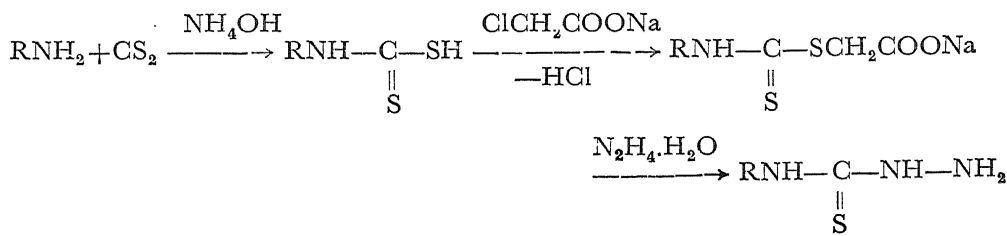
2-प्रतिस्थापित 5-बेंज़िलथायो-1, 3, 4-थायडायज़ोलों की एक श्रेणी 3-ऐसिलडाइथायोकार्बाजिक अम्ल एस्टरों के अम्ल उत्प्रेरित साइक्लोविहाइड्रीकरण द्वारा तैयार की गई[25]।

4-नाइट्रोफेनिल-2′-ऐमिनो-(1′, 3′, 4′-थायडायज़ोलिल-5′) सल्फाइड ऐल्कोहल में 4-नाइट्रो-क्लोरोबेन्ज़ीन के साथ 2-मरकैप्टो-5-ऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल के सोडियम लवण का पश्चवाहन करके तैयार किया गया[27]।

कैंसर रसायनचिकित्सा में 6-मरकैप्टोप्यूरीन (7क)[28-30], 6-थायोग्वानीन (8)[31-34], 6-मरकैप्टो प्यूरीन राइबोन्यूक्लियोसाइड (7ख)[35-37], 2-ऐमिनो-6-(1-मेथिल-4-नाइट्रो-5-इमाइडाज़ोलिल)-थायोप्यूरीन (इमाइडाज़ोलिलथायोग्वानीन),[38-40] 4-ऐमिनो-2-मेथिलथायो-5-पिरीमिडीन मेथेनॉल,[41-42], 2, 5-डाइ-मरकैप्टो मेथिलथायोफीन,[43-46] 2, 5-डाइमरकैप्टोमेथिथायोफीनका थायोयूरोनियम व्युत्पन्न,[43-46] थायो-ग्लाइकोलिक अम्ल[43-46] थायोडाइग्लाइकॉल[43-46] और थायोडाइप्रोपिओनिक अम्ल,[43-46] तथा उनमें से कुछ के ऐल्किलीकृत व्युत्पन्नों (उदाहरण के लिए 6-मेथिलथायोप्यूरीन राइबोन्यूक्लियोसाइड[41,47]) के महत्व को दृष्टि में रखते हुए यह सोचा गया कि विभिन्न मरकैप्टो-1, 3, 4-थायडायज़ोलों तथा उनसे व्युत्पन्न अनेक तरह के थायडायज़ोलिल-ऐल्किल सल्फाइडों का संश्लेषण करके उनकी कैंसर-निरोधक सक्रियता का परीक्षण किया जाय।

कुछ 4-ऐरिलथायोसेमीकार्बाज़ाइड आरंभिक पदार्थों के रूप में उनके संगत प्राथमिक ऐमीन से कज़ाकोव इत्यादि[48] की विधि द्वारा संश्लेषित किए गए।

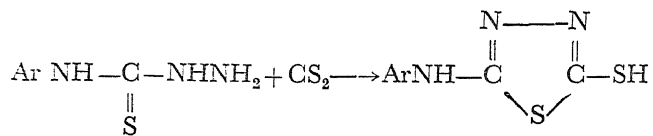
$$RNH_2 + CS_2 \xrightarrow{NH_4OH} RNH{-}\underset{\underset{S}{\|}}{C}{-}SH \xrightarrow[-HCl]{ClCH_2COONa} RNH{-}\underset{\underset{S}{\|}}{C}{-}SCH_2COONa$$

$$\xrightarrow{N_2H_4.H_2O} RNH{-}\underset{\underset{S}{\|}}{C}{-}NH{-}NH_2$$

इस विधि द्वारा संश्लेषित यौगिक सारणी 1 में दिये गये हैं।

सारणी 1

	यौगिक	गलनांक
1.	4-फेनिलथायोसेमीकार्बाज़ाइड	140°
2.	4-(पैरा-टॉलिल) थायोसेमीकार्बाज़ाइड	137°
3.	4-(पैरा-क्लोरोफेनिल) थायोसेमीकार्बाज़ाइड	180°
4.	4-(पैराब्रोमोफेनिल) थायोसेमीकार्बाज़ाइड	189°
5.	4-(पैरा-आयोडोफेनिल) थायोसेमीकार्बाज़ाइड	182°
6.	4-बेंजिल थायोसेमीकार्बाज़ाइड	130°

इस प्रकार प्राप्त 4-ऐरिलथायोसेमीकार्बाज़ाइड डाइमेथिलफार्मऐमाइड में कार्बन डाइसल्फाइड के साथ पश्चवाहित करने से 2-ऐरिलऐमिनो-5-मरकैप्टो-1 3, 4-थायडायज़ोल देते हैं[24]।

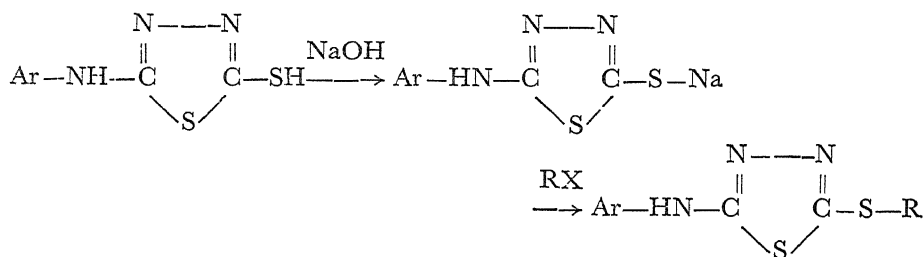
$$\mathrm{Ar\,NH{-}\underset{\underset{S}{\|}}{C}{-}NHNH_2 + CS_2 \longrightarrow ArNH{-}C\overset{N{-}N}{}C{-}SH}\ (\text{वलय में } S)$$

इस प्रकार से तैयार किए गए थायडायज़ोल सारणी 2 में दिए गए हैं।

सारणी 2

	थायडायज़ोल	गलनांक
1.	2-फेनिलऐमिनो-5-मरकैप्टो-1,3, 4-थायडायज़ोल	206°
2.	2-(पैरा-टॉलिलऐमिनो)-5-मरकैप्टो-1, 3, 4-थायडायज़ोल	218-19°
3.	2-(पैरा-क्लोरोफेनिल) ऐमिनो -5-मरकैप्टो-1,3,4-थायडायज़ोल	188°
4.	2-(पैरा-ब्रोमोफेनिल) ऐमिनो-5-मरकैप्टो-1,3,4-थायडायज़ोल	226°
5.	2-(पैरा-आयोडोफेनिल) ऐमिनो-5-मरकैप्टो-1,3,4-थायडायज़ोल	173°
6.	2-बेंज़िलऐमिनो-5-मरकैप्टो-1,3,4-थायडायज़ोल	139°

2-ऐरिलऐमिनो-5-मरकैप्टो-1, 3, 4-थायडायज़ोलों से व्युत्पन्न विभिन्न प्रकार के थाडायज़ोलिल-ऐल्किल सल्फाइडों का संश्लेषण राव[49] द्वारा उपयोग में लाई गई निम्नांकित विधि से सफलतापूर्वक सम्पन्न किया गया है।

ऐल्किल-(5-ऐरिलऐमिनो-1,3,4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइड उपयुक्त मरकैप्टो थायडायज़ोल सोडियम लवण की ऐल्किल हैलाइडों के साथ क्रिया से संश्लेषित किए गए थे[49]।

$$\mathrm{Ar{-}NH{-}C\overset{N{-}N}{}C{-}SH \xrightarrow{NaOH} Ar{-}HN{-}C\overset{N{-}N}{}C{-}S{-}Na \xrightarrow{RX} Ar{-}HN{-}C\overset{N{-}N}{}C{-}S{-}R}\ (\text{वलय में } S)$$

ऐल्किल-(5-ऐरिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल 2-इल) सल्फाइड

इस प्रकार संश्लेषित कुछ-1,3,4-थायडायज़ोलिल-ऐल्किल सल्फाइड सारणी 3 में दिए गए हैं।

सारणी

	यौगिक	गलनांक
1.	मेथिल-(5-फेनिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइड	124-26°
2.	एथिल-(5-फेनिलेएमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइड	135-37°
3.	नार्मल-प्रोपिल-(5-फेनिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइड	122°
4.	आइसो-प्रोपिल-(5-फेनिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइड	180°
5.	नार्मल-ब्यूटिल-(5-फेनिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइड	222°
6.	द्वितीयक-ब्यूटिल-(5-फेनिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइड	202°
7.	तृतीयक-ब्यूटिल-(5-फेनिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायजोल-2-इल) सल्फाइड	212°
8.	मेथिल-[5-(पैरा-टॉलिलऐमिनो)-1, 3 4-थायडायजोल-2-इल] सल्फाइड	134°
9.	एथिल-[5-पैरा-टॉलिलऐमिनो)-1, 3, 4-थायडायजोल-2-इल] सल्फाइड	122-23°
10.	आइसो-प्रोपिल-[5-(पैरा-टॉलिलऐमिनो)-1, 3, 4-थायडायजोल-2-इल] सल्फाइड	180°
11.	नार्मल-ब्यूटिल-[5-(पैरा-टॉलिलऐमिनो)-1, 3, 4-थायडायजोल-2-इल] सल्फाइड	210°
12.	ऐलिल-[5-(पैरा-टॉलिलऐमिनो)-1, 3, 4-थायडायजोल-2-इल] सल्फाइड	118°
13.	मेथिल-[5-(पैरा-क्लोरोफेनिलऐमिनो)-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल] सल्फाइड	203-4°
14.	एथिल-[5-(पैरा-क्लोरोफेनिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल] सल्फाइड	135°
15.	आइसो-प्रोपिल-[5-(पैरा-क्लोरोफेनिलऐमिनो)-1,3,4-थायडायज़ोल-2-इल] सल्फाइड	152°
16.	नार्मल-ब्यूटिल-[5-(पैरा-क्लोरोफेनिलऐमिनो)-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल] सल्फाइड	190°
17.	द्वितीयक-ब्यूटिल-[5-(पैरा-क्लोरोफेनिलऐमिनो)-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल] सल्फाइड	210°
18.	ऐलिल-[5-(पैरा-क्लोरोफेनिलऐमिनो)-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल] सल्फाइड	142°
19.	मेथिल-[5-(पैरा-ब्रोमोफेनिलऐमिनो)-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल] सल्फाइड	190°
20.	एथिल-[5-(पैरा-ब्रोमोफेनिलऐमिनो)-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल] सल्फाइड	191°
21.	नार्मल-प्रोपिल-[5-(पैरा-ब्रोमोफेनिलऐमिनो)-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल] सल्फाइड	190°
22.	आइसो-प्रोपिल-[5-(पैरा-ब्रोमोफेनिलऐमिनो)-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल] सल्फाइड	184°
23.	नार्मल-ब्यूटिल-[5-पैरा-ब्रोमोफेनिलऐमिनो)-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल] सल्फाइड	185°
24.	द्वितीयक-ब्यूटिल-[5-(पैरा-ब्रोमोफेनिलऐमिनो)-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल] सल्फाइड	187°
25.	तृतीयक-ब्यूटिल-[5-(पैरा-ब्रोमोफेनिलऐमिनो)-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल] सल्फाइड	206°

	योगिक	गलनांक
26.	एथिल-[5-(पैरा-आयोडोफेनिलऐमिनो)-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल] सल्फाइड	175°
27.	आइसो-प्रोपिल-[5-(पैरा-आयोडोफेनिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल)-2-इल] सल्फाइड	173°
28.	नार्मल-ब्यूटिल-[5-(पैरा-आयोडोफेनिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल] सल्फाइड	176°
29.	द्वितीयक-ब्यूटिल-[5-(पैरा-आयोडोफेनिलऐमिनो)-1,3,4-थायडायज़ोल-2-इल] सल्फाइड	176°
30.	तृतीयक-ब्यूटिल-[5-(पैरा-आयोडोफेनिलऐमिनो) 1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल] सल्फाइड	179°
31.	ऐलिल-(5-बेन्जिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइड	79°
32.	नार्मल-ब्यूटिल-(5-बेन्जिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइड	173°
33.	आइसो-ब्यूटिल-(5-बेन्जिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइड	168°
34.	नार्मल-ऐमिल-(5-बेन्जिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइड	65°
35.	आइसो-ऐमिल-(5-बेन्जिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइड	72°
36.	2′-पेंटिल-(5-बेंजिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइड	71°
37.	साइक्लोहेक्सिल-(5-बेंजिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइड	95°
38.	बेंजिल-(5-बेंजिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइड	102°
39.	नार्मल-ब्रोमोबेंजिल-(5-बेंजिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइड	131-33°

स्पेक्ट्रोस्कोपीय अध्ययन

(अ) पराबैंगनी स्पेक्ट्रम

प्रस्तुत कार्य के अन्तर्गत तैयार किए गए अनेक तरह के यौगिकों का पराबैंगनी स्पेक्ट्रम, एथेनॉल को विलायक के रूप में प्रयोग करके पर्किन-एल्मर 202 स्वचालित अभिलेख स्पेक्ट्रममापी पर प्राप्त किया गया है।

ये आँकड़े, 1, 3, 4-थायडायज़ोलों और उनके व्युत्पन्नों[50] पर प्रकाशित दूसरे आँकड़ों के योग में दिखाते हैं कि इस प्रकार अध्ययन किए गए यौगिक 230 और 330 मेग ओम $(m\mu)$ के बीच के क्षेत्र में विशेष शिखर देते हैं। स्थान स्थान पर फेनिल वर्ग के आर्थोऐनिसिल वर्ग से प्रतिस्थापन के कारण बहुत थोड़ा वर्णापकर्षी स्थानान्तरण आता है, जबकि फेनिल वर्ग का बेंजिल वर्ग से प्रतिस्थापन हिप्सो-क्रोमिक स्थानान्तरण देता है।

यौगिक	अवशोषण उच्चिष्ठ,$m\mu$
2-फेनिलऐमिनो-5-मरकैप्टो-1,3,4-थायडायज़ोल	238 257 328
2-आर्थो-मेथॉक्सीफेनिलऐमिनो-5-मरकैप्टो-1,3,4-थायडायज़ोल	239 258 330
मेथिल-(5-फेनिलऐमिनो-1,3,4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइड	245 305
एथिल-(-5-फेनिलऐमिनो-1.3,4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइड	245 306
ऐलिल-[5-(पैरा-क्लोरोफेनिल) ऐमिनो-1,3,4-थायडायज़ोल-२-इल] सल्फाइड	255 308
आइसो-ऐमिल-(5-बेन्जिलऐमिनो-1,3,4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइड	242 (sh) 289

(ब) अवरक्त स्पेक्ट्रम

तैयार किए गए अनेक प्रकार के 2-ऐरिलऐमिनो-5-मरकैप्टो-1, 3, 4-थायडायज़ोलों और एल्किल/एरैल्किल-(5-एरिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइडों का अवरक्त स्पेक्ट्रम $\overline{KBr}$-डिस्कों के रूप में पर्किन-एल्मर मॉडल 337 स्पेक्ट्रममापी पर अभिलिखित किया गया है। ये यौगिकों की संरचना निर्धारित करने में लाभदायक हैं[51,52]। उदाहरणार्थ, ये विभिन्न प्रतिस्थापियों और संरचनात्मक इकाइयों की उपस्थिति सूचित करते हैं।

मेथिल-(5-फेनिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइड में फ़ेनिल वर्ग को 1600, 1580, 1450, 792 और 690cm^{-1} पर पट्टों द्वारा प्रदर्शित किया गया है। एक मेथिल वर्ग को 1370cm^{-1} शिखर द्वारा दिखाया गया है। इसमें अन्य वर्ग NH, C=N और S हैं जो नीचे दिए जा रहे हैं।

3200 cm^{-1} : NH

1610 cm^{-1} : चक्रीय C=N

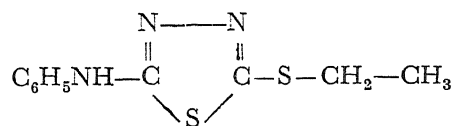
1600, 1580, 1450, 792, 690cm^{-1} : एक-प्रतिस्थापित फेनिल वर्ग

1350 cm^{-1} : CH_3 (सममित- बंकन) ;

752 cm^{-1} : S

(स) न्यूक्लीय चुंबकीय अनुनाद (NMR) स्पेक्ट्रम

एथिल-(5-फेनिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइड (9) का NMR स्पेक्ट्रम $CDCl_3$ में TMS के साथ आंतरिक मानक के रूप में वैरियन A-60 D मशीन पर लिया गया।

```
              N———N
              ‖     ‖
C6H5NH—C       C—S—CH2—CH3
              \ S /
```

एथिल-(5-फेनिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायज़ोल-2-इल) सल्फाइड

इस अणु में प्रोटॉन चार भिन्न भिन्न परिस्थितियों में उपस्थित हैं :

(1) एरोमैटिक वलय से संलग्न पाँच प्रोटॉन;
(2) एक NH प्रोटॉन;
(3) दो मेथिल प्रोटॉन;
(4) तीन मेथिल प्रोटॉन;

इस प्रकार स्पेक्ट्रम में चार संकेत होने चाहिए। इस स्पेक्ट्रम का निरीक्षण करने पर चार संकेत मिलते हैं, फिर भी इनमें से केवल एक (NH) में एक एकल शिखर (एक पृथुल ककुद) होता है। ड्यूटेरीकरण करने पर पृथुल ककुद अदृश्य हो जाता है, जिससे NH वर्ग की उपस्थिति संपुष्टि होती है।

(द) द्रव्यमान स्पेक्ट्रम

नार्मल-ब्यूटिल-(5-फेनिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायजोल-2-इल) सल्फाइड का अल्प विभेदन द्रव्यमान स्पेक्ट्रम निकाला गया है।

द्रव्यमान स्पेक्ट्रम द्वारा नार्मल-ब्यूटिल-(5-फेनिलऐमिनो-1, 3, 4-थायडायजोल-2-इल) सल्फाइड में निम्नलिखित आयनों को पहचाना गया है। नीचे इन आयनों की संरचना दी जा रही है।

m/e	संरचना	m/e	संरचना
77	C_6H_5	190	$C_9H_8N_3S$
91	C_6H_5N	204	$C_{10}H_{10}N_3S$
93	C_6H_7N	207	$C_8H_5N_3S_2$
104	C_7H_8N	209	$C_8H_7N_3S_2$
118	$C_7H_6N_2$	218	$C_{11}H_{12}N_3S$
133	$C_7H_7N_3$	223	$C_9H_9N_3S_2$
136	C_7H_6NS	236	$C_{10}H_{10}N_3S_2$
150	$C_7H_6N_2S$	265	$C_{12}H_{15}N_3S_2$
164	$C_7H_6N_3S$		

निर्देश

1. ओमेज, डब्ल्यू० । इन्टर्न० कांग्रे० केमोथिरैपी 1964 (प्रोसी०, थर्ड, स्टुटगर्ट, 1963, (1), 530-51; केमिकल एब्सट्रैक्ट्स, 1965, **63**, 16986.

2. सल्दाबोल्स, एन०, ऐलेकसीवा, एल० तथा ब्रिज्गा, बी० । लैटविजास पी० एस० आर० जिनाट्नू अकैड० वेस्टिस, 1964, **9**, 97-102; केमिकल एब्सट्रैक्ट्स, 1965, **62**, 9492.

3. वेयूफेन, डब्ल्यू०, पाइल, टी० एच०, ग्रुएब्नर, डब्ल्यू० तथा ज्वेलिच, डब्ल्यू० डी० । फार्मेसी, 1965, **20**, 629-33; केमिकल एब्सट्रैक्ट्स, 1966, **64**, 5488.

4. स्कैजियस, के० तथा कैम्पबेल, डी० । इन्टर्न० कांग्रे० केमोथिरापी, 1964, प्रोसी० थर्ड०, स्टुटगर्ट, 1963 (1), 567-70; केमिकल एब्सटैक्ट्स 1966, **65**, 1254.

5. ऐलेकसीवा, टी० एन० तथा सल्दाबोल्स, एन० ओ० । लैटविजास पी० एस० आर० जिनाट्नू अकैड० वेस्टिस, 1966, **7**, 101-6; केमिकल एब्सट्रैक्ट्स, 1967 **66**, 1475.

6. बोहिंगर, सी० एफ०, तथा सोहने, जी० एम० बी० एच० । एफ० आर० एम० 1965, 3285; केमिकल एब्सट्रैक्ट्स, 1966, **64**, 3553.

7. रीमर्स, डब्ल्यू० ए०, गिब्स, जी० जे०, तथा वीज, एम० जे० । जर्नल हेटरोसाइक्लिक केमिस्ट्री, 1969, **6**, 835-40; केमिकल एब्सट्रैक्ट्स, 1970, **72**, 43578.

8. कुर्ट स्कजियस तथा बो जिटर बर्ग । एन्टीबायोटिक्स एण्ड केमोथेरापी, 1961, **10**, 37; केमिकल एब्सट्रैक्ट्स, 1961, **55**, 14577.

9. कियर, एल० बी० । यू० एस०, 1967, **3**, 337, 398; केमिकल एब्सट्रैक्ट्स, 1967 **67**, 102766.

10. एग्रिपैट, एस० ए० । एफ० आर०, 1967, 1, 502477; केमिकल एब्सट्रैक्ट्स, 1969, **70**, 4116.

11. टार्टलर, जी० तथा वेयूफेन, डब्ल्यू० । फार्मेसी, 1966, **21**, 425-6; केमिकल एब्सट्रैक्ट्स, 1966, **65**, 17418.

12. मिल्स, जे० टी० तथा वैलेस, एच० ए० एच० । **कनै० जर्न० प्लान्ट साइंस**, 1968, **48**, 587-94; **केमिकल एब्सट्रैक्ट्स**, 1969, **70**, 19209.

13. थार्न, जी० डी० तथा लुडविग, आर०ए०। **कनै० जर्न० बाटनी**, 1958, **36**, 389-92; **केमिकल एब्सट्रैक्ट्स**, 1958, **52**, 12300.

14. सीबा लिमिटेड बेल्ज० । 1963, 632, 848, नवम्बर 27; **केमिकल एब्सट्रैक्ट्स**, 1964, **60**, 15884.

15. स्टैटो, आर० क्यूबो, एच०, ओआई, टी०, ओकेमोटो, एच० । **जर्न० आर्गेन०** 1969, 1, 921, 220, **जापान**; **केमिकल एब्सट्रैक्ट्स**, 1970, **72**, 43685.

16. सीओटी, एम० एम०, हम्फ्रीस, एस० आर०, वेन्डिटी, जे० एम०, कैप्लान, एन० ओ० तथा गोल्डिन, ए० । **कैंसर रिसर्च**, 1960, **20**, 1195-1201; **केमिकल एब्सट्रैक्ट्स** 1960, **54**, 25220.

17. प्लैन्टोनोवा, के० जी० एन० । **अकैड० मेड० नौक० एस०एस०एस०आर०** 1960, **2**, 167-9; **केमिकल एब्सट्रैक्ट्स**, 1964, **60**, 1010.

18. आट्जेन, एच० एफ०, पर्पल जे० आर०, केलाम, वी० सी०, क्रैंकोफ, आई० एच० तथा बर्चेनल, जे० एच० । **कैंसर रिसर्च**, 1964, **24**, 699-92; **केमिकल एब्सट्रैक्ट्स**, 1966, **65**, 12742.

19. हिदेव इन्डो, केई स्टैटो तथा टारु कवासाकी । **सांइस रिप्ट० रिस० इन्स्ट०**, 1963, 11, 187-91; **केमिकल एब्सट्रैक्ट्स**, 1964, **60**, 3385.

20. सीजर, डी० आर० तथा टाम कुफसिक, ए० एस० । **जर्नल आॅर्गेनिक केमिस्ट्री**, 1961, **26**, 3566; **केमिकल एब्सट्रैक्ट्स**, 1962, **56**, 10131.

21. मैसाव कुरानारी तथा टोथिवो कोन्डो । **जापान**, 1964, **12**, 631; **केमिकल एब्सट्रैक्ट्स**, 1964, **61**, 16142,

22. (क) बैम्बस, एल० एल० The Chemistry of Heterocyclic Compounds. **(इ० डी० ए० वीजबर्जर, इंटर सांइस पब्लिसर्स, इन्स०, न्यूयार्क, 1952), भाग 1 पृष्ठ** 3-214.

22. (ख) राड, ई० एच० । Chemistry of Carbon Compounds **(एलसवीयर पब्लिशिंग कं०, ऐम्सटर्डम, 1957), पृष्ठ** 473.

23. ऐन्सवर्थ, सी० । **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1656, **78**, 1973-5; **केमिकल एब्सट्रैक्ट्स**, 1956, **50**, 13886.

24. अग्फा ए० जी० ब्रिट० । — 1963, 490, 169, **अक्टूबर** 23; **जर्न० एपिल० जुलाई** 1960, 27, पृ० 4; **केमिकल एब्सट्रैक्ट्स**, 1964, **60**, 2951.

25. यंग रिचार्ड, डब्ल्यू० तथा ऊड कैश्रिन एच० । — **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1955, **77**, 400-3; **केमिकल एब्सट्रैक्ट्स**, 1956, **50**, 670.

26. बैन, एन० । — **जर्न० फार्मास्यु० सोसा० जापान**, **74**, 695-7; **केमिकल एब्सट्रैक्ट्स**, 1954, **48**, 10741.

27. बैम्बस, एल० एल० । — **जर्न० अमें० केमि०, सोसा०**, 1945, **67**, 668.

28. इलियन, जी० बी०, बुर्ग, ई० तथा हिट्-चिंग्स, जी० एच० । — **वही**, 1952, **74**, 411.

29. बर्चेनल, जे० एच०, कार्नोस्की, डी० ए०, मर्फी, एम० एल०, एलिसन, आर० आर०, साइक्स, एम० पी०, टैन, सी० टी० सी०, मर्मेन, ए० सी०, यूसियोग्लू, एम० तथा ज़ोड्स, सी० पी० । — **अमे० जर्न० मेडि० सांइस**, 1954, **228**, 371.

30. जुब्राड, सी० जी० । — **आर्किब्ज इन्टर्नल मेडिसिन**, 1960, **106**, 141, 663.

31. बर्चेनल, जे० एच०, कार्नोस्की, डी० ए०, मर्फी, एम० एल०, एलिसन, आर० आर०, साइक्स, एम० पी०, टैन, सी० टी० सी०, मर्मेन, ए० सी०, यूसियोग्लू, एम० तथा ज़ोड्स, सी० पी०, । — **अमे० जर्न० मेडिकल साइंस**, 1954, **228**, 371; ब्लड, 1953, **8**, 965.

32. ले पेज, जीं० ए० । — **कैंसर रिसर्च**, 1960, **20**, 403.

33. एलिसन, आर० आर० तथा बर्चेनल, जे० एच० । — **क्लिनिकल फार्मस्युटिकल थेरापी**, 1960, **1**, 631.

34. कार्बोने, पी० पी०, ईरे, ई०, ओवन्स, ए० एच०, ओल्सन, के० बी० तथा मिलर, एस० पी० । — **कैंसर केमोथेरापी रिपोर्ट**, 1964, **36**, 59.

35. चैबेल, एफ० एम०, मान्टगोमरी, जे० ए०, स्कीपर, एच० ई०, लैस्टर, डब्ल्यू० आर० तथा थाम्सन, जे० आर० । — **कैंसर रिसर्च**, 1961, **21**, 690.

36. इलियन, जी० वी०, कैलेघन, एस० डब्ल्यू० नाथन, एच०, बोबर, एस०, रुन्डलेस, आर० डब्ल्यू० तथा हिट्चिंग्स, जी० एच०। **बायोकेमि० फार्मको०**, 1963, **12**, 85.

37. रीजेल्सन, डब्ल्यू, हालैंड, जे० एफ०, फ्रे, ई०, गोल्ड, जी० एल०, हाल, टी०, क्रैन्ट, एम०, मिलर, एस० ओ० तथा श्निडर, बी० आई०। **कैंसर केमोथेरापी रिपोर्ट**, 1964, **36**, 41.

38. एलिसन, आर० आर० तथा टैन, सी० टी० सी०। **कैंसर केमोथेरापी रिपोर्ट**, 1960, **8**, 61.

39. रंडलेस, आर० डब्ल्यू०, फुल्मर, टी० ई०, डोले, आर० टी० तथा गोरे, टी० डब्ल्यू। **कैंसर केमोथेरापी रिपोर्ट**, 1960, 8, 66.

40. ह्वाइट, एफ० आर०। **वही**, 1961, **11**, 213.

41. राव, आर० पी०। **जर्न० साइं० इंड० रिसर्च**, 1967, **26**, 333.

42. हालैंड, जे० एफ०, गुथ्री, आर०, शेचा, पी० तथा टाइकेलमैन, एच०। **कैंसर रिसर्च**, 1958, **18**, 335.

43. देसाई, एच० एस०, गुप्टे, एस० एस० तथा तिलक, बी० डी०। **टेट्राहेड्रन लेटर्स**, 1964, 1609.

44. गोग्टे, वी० एन०। **पी० एच-डी० थिसिस, बाम्बे यूनिवर्सिटी**, 1963.

45. सहस्रबुधे, एम० बी०, नारुर्कर, एम० बी०, काट्निस, एल० बी०, तिलक, बी० डी० तथा भवसार, एम० डी०। **नेचर (लंदन)**, 1959, **184**, 201.

46. सहस्रबुधे, एम० बी०, नारुर्कर, एम० बी०, काट्निस, एल० बी०, कृष्णमुर्थी, ए० एस०, गैडेकर, के० एन०, तिलक, बी० डी०, शाह, एल० जी० तथा गोग्टे, वी० एन०। **ऐक्टा अन० इन्ट० कैंक्रम**, 1964, **20**, 221.

47. बैनेट, एल० एल०, ब्रोकमैन, आर० डब्ल्यू०, स्नेब्ली, एच० पी०, चम्प्ले, एस०, डिक्सन, जी० जे०, स्कैबेल, एफ० एम०, डुलमैड्जे, ई० ए०, स्कीपर, एच० ई०, मान्टगोमरी, जे० ए० तथा थामस, एच० जे०। **नेचर (लन्दन)**, 1965, **205**, 1276.

48. कज़ाकोव, वी० या तथा पोस्टोवस्की, आई० या। इन्वेस्ट० वीशिख यूचेब० जेवेडिनाई, खिम० आई खिम० टेख्नाल०, 1961, **4**, 238-41; केमिकल एब्सट्रैक्ट्स, 1961, **55**, 23415.

49. राव, आर० पी०। लैब्डेव जर्नल सांइस एण्ड टेक्नॉलॉजी, 1969, **7**, 47.

50. सीबा लिमिटेड ब्रिट०। 900, 815, 1962; केमिकल एब्सट्रैक्ट्स, 1964, **60**, 4287.

51. रामचन्दर, जी० तथा श्रीनिवासन, वी० आर०। जर्न० साइं० इंड० रिसर्च, 1962, **21सी**, 44-7; केमिकल एब्सट्रैक्ट्स, 1960, 57, 16601.

52. पोस्टेस्कू, डी०, डाइकोविसियू, सी० तथा बिन्डर, यू०। रिव० रोम० किम०, 1968, **13**, 561-7; केमिकल एब्सट्रैक्ट्स, 1968, **69**, 111614.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No 2, April, 1973, Pages 89-96

कुछ धातु आयनों के सोडियम नाइट्राइट-ऐसीटोन-जल निकायों में आयन विनिमय वितरण साम्य का अध्ययन

शिवनन्दन शर्मा एवं रा० प्र० भटनागर
रसायन विभाग, जीवाजी विश्वविद्यालय, ग्वालियर

[प्राप्त—मई 8, 1971]

सारांश

प्रस्तुत अध्ययन में ऐसीटोन मिश्रित जलीय निकायों में सोडियम नाइट्राइट की उपस्थिति द्वारा ऐसे निकायों का उपयोग किया गया है जो धातु आयनों के नाइट्राइट संकुलों पर अपना प्रभाव डालकर विनिमायकों की उपस्थिति में विनिमय के वितरण साम्य को रूपांतरित करते हैं।

विभिन्न धातु आयनों को इस प्रकार से सोडियम नाइट्राइट-ऐसीटोन-जल निकायों में प्रयुक्त करके उनके वितरण गुणांक का मान ज्ञात किया गया है। K_D के मान को विभिन्न परिस्थितियों में प्राप्त करने का यत्न किया गया है और यह बताया गया है कि इन परिवर्तशील परिस्थितियों का आयन के वितरण साम्य पर क्या प्रभाव पड़ता है।

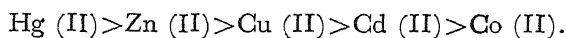
इस अध्ययन द्वारा यह भी बताने का यत्न किया गया है कि इस प्रकार के मिश्रित निकायों द्वारा धातुओं के वैश्लेषिक पृथक्करण की क्या संभावनायें हैं।

Abstract

Ion-exchange equilibrium distribution studies of some metal ions in sodium nitrite-acetone-water media. *By* R. P. Bhatnagar and Shiv Nandan Sharma, School of Studies in Chemistry, Jiwaji University, Gwalior.

Ion-exchange equilibrium distribution of some metal ions has been studied in nitrite-acetone-water systems with cation and anion exchangers. The distribution-coefficients (K_D) show the utility of this new nitrite medium, which is a complexing medium for most transition metal ions giving anionic complexes in solution. Such studies in aqueous-aceton mediume show that an increase in concentration of acetone

in the solution given enhanced complex formation and the values of K_D get changed. On the basis of obtained distribution coefficient values, many useful separations can be achieved, most important amongst these being the separation of mercury and zinc from copper, cadmium and cobalt. The K_D values obtained on the basis of anion exchange studies show the sequence of stability of metal-nitrite complexes as below:

$$Hg (II) > Zn (II) > Cu (II) > Cd (II) > Co (II).$$

आयन विनिमय में व्यक्तीकरण के हेतु संकुलन-कर्मकों के उपयोग करने पर आयनों की विनिमायक के लिये वरणात्मकता बदल जाती है। किसी आयन की वरणात्मकता किसी एक प्रकार के विनिमायक के लिये घटेगी या बढेगी, यह इस पर निर्भर करता है कि कथित आयन संकुलनकर्मक के सम्पर्क में आकर किस सीमा तक संकुल बनाते हैं। इस प्रकार से समान परिस्थितियों में यदि विनिमायक किसी एक विरोधी-आयन के स्थान पर अन्य विरोधी-आयन के हेतु वरीयता दर्शाता है, तो यह संकुलन के विस्तार एवं संकुलनकर्मक की सान्द्रता पर निर्भर रहता है। आयन विनिमय अध्ययनों में संकुलन कर्मकों के रूप में अधिकतर ऐसे संकुलन ऋणायनों का प्रयोग हुआ है जो निर्बल अम्लों में से प्राप्त होते हैं। इस प्रकार सिट्रेट, टार्टरेट, लैक्टेट आदि आयनों का विस्तृत उपयोग इस कार्य में हुआ है। कई प्रबल अम्लों के ऋणा-यन भी इस प्रकार के कार्य में प्रयुक्त हुए हैं, जिनमें से क्लोराइड, फ्लोराइड, सल्फेट तथा नाइट्रेट मुख्य हैं।

जलीय विलयनों में धनायन और ऋणायन विनिमायकों के लिये क्लोराइड, फ्लोराइड, सल्फेट तथा नाइट्रेट माध्यमों में कई वितरण अध्ययन किये जा चुके हैं।[1,2] पिछले कुछ वर्षों से इस प्रकार के अध्ययनों के लिये अजलीय एवं मिश्रित जलीय विलयनों का प्रयोग बढ़ा है। किसी जलीय विलयन में यदि ध्रुवीय कार्बनिक विलायक को मिला दिया जाये तो यह योग अनेक प्रकरणों में आयनों की वरणात्मकता को रूपान्तरित कर देता है। इस प्रकार आयन विनिमय के लिए अनेक बार ऐसी परिस्थितियां प्राप्त की जा सकती हैं जो जलीय विलयनों में सम्भव नहीं हो पातीं। इस विषय पर एक उत्तम समीक्षा निबन्ध कोर्किश[3] द्वारा प्रकाशित किया गया है।

भटनागर तथा सहयोगियों[4-9] ने जलीय सोडियम नाइट्राइट को निक्षालक के रूप में धनायन विनिमय वर्णलेखिकी में अनेक बार प्रयुक्त किया है। परन्तु इस संकुलनकर्त्ता ऋणायन की उपस्थिति में कुछ आयनों का साम्य वितरण अध्ययन जलीय एवं ऐल्कोहलीय विलयनों में भटनागर, त्रिवेदी, एवं योगे-शबाला[10] द्वारा प्रकाशित हुआ है। इस अध्ययन में यह दर्शाया गया है कि मिश्रित जलीय विलयनों का नाइट्राइट माध्यम में उपयोग शुद्ध जलीय विलयनों की अपेक्षा कई पृथक्करणों के लिए अधिक उपयोगी होता है।

प्रस्तुत अध्ययन में मिश्रित ऐसीटोन-जल निकायों में नाइट्राइट ऋणायन की उपस्थिति में कुछ धातु-आयनों का साम्यावस्था में वितरण ज्ञात किया गया है। यह अध्ययन धनायन और ऋणायन दोनों ही प्रकार के विनिमायकों को लेकर प्रस्तुत किया गया है।

प्रयोगात्मक

इस अध्ययन में जिन अभिकर्मकों का प्रयोग हुआ है, वे निम्नलिखित प्रकार हैं :

आयन विनिमय रेज़िन :—धनायनिक विनिमय अध्ययनों के लिए वायु में सुखाये गये प्रबल अम्लीय धनायन विनिमायक डावेक्स—50 WX—8 का हाइड्रोजन रूप व्यवहृत किया गया।

इसी प्रकार डावेक्स—1—X8 ऋणायन विनिमायक का नाइट्रेट रूप में उपयोग ऋणायनिक विनिमय अध्ययनों के लिए किया गया है। दोनों ही रेज़िन वैश्लेषिक कोटि के थे तथा वे 20—50 छिद्र वाली चलनी से निकल सकते थे।

मानक विलयन : ताम्र, रजत, जस्ता एवं कोबाल्ट धातुओं के मानक विलयन उनके शुद्ध नाइट्रेट लवणों का उपयोग करके जल तथा जलीय-ऐसीटोन में 0·05 N सांद्रता के बनाये गये। कैडमियम तथा पारे के 0·05 N विलयन क्रमशः उनके सल्फेट एवं क्लोराइड लेकर इसी प्रकार बनाये गये।

विलेयक माध्यम (solvent media) बनाने के लिये विशुद्ध जल द्विक आसवित ऐसीटोन तथा असाधारण शुद्ध श्रेणी के सोडियम नाइट्राइट का प्रयोग किया गया था।

विभिन्न तत्वों का निर्धारण : रजत(I) तथा पारे(II) के निर्धारण के लिए अमोनियम थायोसायनेट का प्रयोग लौह(III) आयन सूचक की उपस्थिति में किया गया। ताम्र के निर्धारण लिए आयडोमिति विधि तथा अन्य आयनों के लिये ई० डी० टी० ए० (EDTA) अनुमापक प्रयुक्त कर संकुल-मितीय अनुमापन विधि का प्रयोग किया गया।

वितरण गुणांक का निर्धारण : वितरण अध्ययन के लिए कांच की डाट वाले शंक्वाकार फलास्कों (250 मिली) का उपयोग किया गया। प्रत्येक बार 1 ग्राम रेज़िन को 50 मिली० विलयन के साथ (जिसमें धातु आयन 0·05 N, जलीय अथवा मिश्रित जलीय-ऐसीटोन-नाइट्राइट माध्यम में उपस्थित था) मिला कर साम्यावस्था प्राप्त की गयी। इस प्रकार से प्राप्त बैचों को साम्यावस्था प्राप्त करने के लिये 24 घन्टे तक हिलाया गया तथा उसके पश्चात्, प्रत्येक बैच के विलयनों को धातु आयन के लिए विश्लेषित किया गया। इस प्रकार प्राप्त धातु आयन की सान्द्रता के आधार पर निम्नलिखित सम्बन्ध द्वारा भार वितरण गुणांक K_D का परिकलन किया गया :

$$K_D=\frac{\text{धातु का मिली-तुल्यमान/ग्राम शुष्क रेज़िन}}{\text{धातु का मिली-तुल्यमान/मिलीलिटर विलयन}}$$

प्राप्त परिणामों को सारणी 1 तथा 2 में दिया गया है।

परिणाम तथा विवेचना

जल-ऐसीटोन-सोडियम नाइट्राइट निकायों में किये गये आयन विनिमय साम्य-वितरण अध्ययनों में यह स्पष्ट है कि इस प्रकार के निकायों के उपयोग से आयनों की वरणात्मकता पर निश्चित प्रभाव पड़ता है। सारणी 1 के K_D मानों को यदि ध्यान से देखा जाये तो वे साधारणतः लगभग सभी प्रकरणों में

सारणी 1

धनायन विनिमायक पर जल-ऐसीटोन-सोडियम नाइट्राइट निकायों में कुछ आयनों के वितरण गुणांक

आयन	ऐसीटोन सान्द्रता (प्रतिशत आयतनी)	नाइट्राइट सान्द्रता, N							
		0·05	0·1	0·2	0·5	0·7	1·0	1·5	2·0
Cu (II)	20	0	150	111	14	11	9	7	6
Ag (I)	20	अव०*	अव०	अव०	अव०	1	0	0	1
Zn (II)	20	719	664	213	167	142	124	122	117
Cd (II)	20	17	33	28	13	3	2	9	5
Hg (II)	20	859	783	664	719	719	575	586	367
Co (II)	20	272	134	57	26	19	31	79	22
Cu (II)	30	0	0	29	4	0	0	1	9
Ag (I)	30	अव०	अव०	अव०	19	0	0	1	3
Zn (II)	30	4950	3950	3500	995	154	124	119	106
Cd (II)	30	38	30	25	5	4	5	2	6
Hg (II)	30	529	575	950	783	950	644	783	895
Co (II)	30	98	69	35	26	10	10	9	3
Cu (II)	50	0	150	61	9	1	0	0	3
Ag (I)	50	अव०	अव०	अव०	0	0	1	2	3
Zn (II)	50	506	317	227	119	117	112	109	104
Cd (II)	50	35	50	31	9	3	7	8	6
Hg (II)	50	664	950	1200	575	950	615	575	509
Co (II)	50	78	60	50	22	6	0	0	6

*अव० = अवक्षेप

नाइट्राइट की सांद्रता बढ़ाने पर घटते हैं। इसमें यद्यपि कुछ अपवाद भी हैं (जैसे पारे के प्रकरण में K_D मान पहले बढ़ते हैं तथा फिर घटते हैं) फिर भी यह सामान्य रूप से कहा जा सकता है कि नाइट्राइट की मात्रा बढ़ाने पर धनायन विनिमायक पर आयन का विनिमय कम हो जाता है। इसका मात्र कारण यही है कि नाइट्राइट की मात्रा बढ़ने पर आयन का संकुलन बढ़ जाता है और संकुलित आयन ऐसीटोन की उपस्थिति में अधिक स्थायित्व दर्शाता है। यहाँ यह आवश्यक प्रतीत नहीं होता कि संकुल के स्थायित्व के लिये ऐसीटोन की मात्रा में भी वृद्धि की जाये, क्योंकि 20 प्रतिशत ऐसीटोन पर जो K_D मान हैं उनमें अधिकतर ऐसीटोन की सांद्रता बढ़ाने पर कम होते हैं, बढ़ते नहीं। पारा यहां भी अपवाद है। उसमें अधिक K_D मान 30 प्रतिशत ऐसीटोन वाले प्रकरणों में है। इससे यह ज्ञात होता है कि संभवतः इस आयन के नाइट्राइट संकुलों को स्थायित्व प्रदान करने में 20 के स्थान पर 30 प्रतिशत ऐसीटोन का विलयन अधिक उपयोगी होता है।

उन प्रकरणों में, जहाँ धनायन विनिमायक पर नाइट्राइट की अधिक मात्रा होने पर भी तुलनात्मक रूप से अधिक विनिमय हुआ है, यह कहा जा सकता है कि आयन-नाइट्राइट संकुल कम स्थायी है। इस प्रकार ऐसीटोन एवं नाइट्राइट, दोनों का ही संकुलन साम्य पर प्रभाव पड़ता है। जल में न्यून परा-वैद्युत स्थिरांक वाले विलायक के मिश्रित किये जाने पर संकुल निर्माण अधिक होता है[11–14]। यहाँ भी ऐसीटोन की जलीय विलायकों में उपस्थिति के कारण इसी प्रकार के परिणाम मिलते हैं।

धनायन-विनिमय (सारणी 1) के आधार पर यह कहा जा सकता है कि 30 प्रतिशत ऐसीटोन तथा सभी नाइट्राइट सान्द्रताओं पर ताम्र का जस्ता और पारे से पृथक्करण हो सकता है। परन्तु ताम्र को कोबाल्ट से पृथक करने के लिये 20 प्रतिशत ऐसीटोन और न्यूनतम नाइट्राइट सान्द्रता ($0{\cdot}50\,N$) अधिक उपयोगी है। पारे का कैडमियम से पृथक्करण भी लगभग सभी नाइट्राइट सान्द्रताओं पर 20, 30 तथा 50 प्रतिशत ऐसीटोन की उपस्थिति में किया जा सकता है। जस्ता तथा कोबाल्ट का पृथक्करण भी 50 प्रतिशत ऐसीटोन और कम नाइट्राइट सान्द्रता वाले विलयनों द्वारा सम्भव है।

उपर्युक्त प्रस्तावित पृथक्करणों में से ताम्र-पारा, पारा-कैडमियम तथा जस्ता-कोबाल्ट के पृथक्करण ऐसे हैं, जो न तो शुद्ध जलीय-नाइट्राइट निक्षालकों द्वारा सम्भव हो सकते हैं, और न ही जल-ऐल्कोहल-नाइट्राइट निकायों द्वारा। इसी कारण प्रस्तुत अध्ययन में प्रयुक्त ऐसीटोन मिश्रित निकायों का महत्व ज्ञात होता है।

ऋणायन विनिमायकों पर किये गये साम्यावस्था वितरण अध्ययनों का भी उपयोग इसी कारण है। सारणी 2 के वितरण स्थिरांकों को देखने से ज्ञात होता है कि यहां (ऋणायन विनिमय में) K_D का मान नाइट्राइट की बढ़ती हुई सान्द्रता के साथ बढ़ता है। यहां भी पारे का वितरण स्थिरांक अत्यधिक ऊँचा है तथा यह मान 30 प्रतिशत ऐसीटोन में 20 प्रतिशत ऐसीटोन वाले विलयनों की अपेक्षा अधिक है, जबकि 50 प्रतिशत ऐसीटोन वाले विलयनों में इनकी और अधिक वृद्धि नहीं होती। इस सारणी से यह भी ज्ञात होता है कि यहां 30 प्रतिशत ऐसीटोन वाले निकाय आयनों के नाइट्राइट संकुलों को अधिक स्थायित्व प्रदान करते हैं।

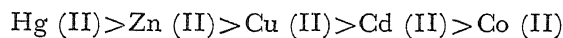
सारणी 2

ऋणायन विनिमायक पर जल-ऐसीटोन-सोडियम नाइट्राइट निकायों में कुछ आयनों के वितरण गुणांक

आयन	ऐसीटोन सान्द्रता (प्रतिशत आयतनी)	नाइट्राइट सान्द्रता, N							
		0·05	0·1	0·2	0·5	0·7	1·0	1·5	2·0
Cu (II)	20	14	16	19	36	46	59	72	89
Ag (I)	20	अव०*	अव०	अव०	अव०	46	39	32	28
Zn (II)	20	122	124	138	154	177	207	244	263
Cd (II)	20	13	19	27	37	42	58	41	42
Hg (II)	20	4950	4950	4950	4950	4950	4950	4950	4950
Co (II)	20	14	15	16	18	18	19	20	20
Cu (II)	30	26	31	36	33	46	64	69	85
Ag (I)	30	अव०	अव०	अव०	55	43	39	34	31
Zn (II)	30	119	128	150	213	227	236	263	295
Cd (II)	30	15	20	26	37	30	37	38	45
Hg (II)	30	9950	9950	9950	9950	9950	9950	9950	9950
Co (II)	30	15	13	7	16	15	20	17	21
Cu (II)	50	3	27	61	75	68	72	41	33
Ag (I)	50	अव०	अव०	अव०	33	29	26	22	19
Zn (II)	50	88	112	142	163	182	188	145	154
Cd (II)	50	55	50	39	30	28	37	32	35
Hg (II)	50	9950	9950	9950	9950	9950	9950	9950	9950
Co (II)	50	10	13	13	11	11	6	13	12

*अव० = अवक्षेप

सारणी 2 में दिये K_D मानों के आधार पर इन धातु आयनों के नाइट्राइट संकुलों के स्थायित्व का क्रम ज्ञात करना कठिन नहीं है। यह क्रम ऋणायन विनिमय-वरणात्मकता के क्रम से सामंजस्य रखता प्रतीत होता है अतः यह क्रम प्रयुक्त धातुओं के लिये इस प्रकार दिया जा सकता है :—

$$Hg\ (II) > Zn\ (II) > Cu\ (II) > Cd\ (II) > Co\ (II)$$

यहां स्पष्ट है कि जस्ता तथा कैडमियम के संकुलों का स्थायित्व ऐसीटोन की उपस्थिति में बिलकुल बदल जाता है। इसके विपरीत जलीय विलयनों में कैडमियम का संकुल अधिक स्थायी होता है। उपर्युक्त क्रम में रजत का स्थान निर्धारित नहीं किया गया है, क्योंकि यह आयन ऐसीटोन मिश्रित विलयनों में नाइट्राइट की कम मात्रा होने पर अवक्षेपित हो जाता है अतः इसके स्थायित्व पर कोई निर्णय लेना उचित नहीं होगा।

इस अध्ययन के आधार पर ऋणायन विनिमायक द्वारा भी अनेक उपयोगी धातुओं का पृथक्करण किया जा सकता है। इसमें पारे तथा जस्ते का अन्य धातुओं (ताम्र, कैडमियम तथा कोबाल्ट) से पृथक्करण संम्भव है। प्रस्तुत अध्ययन इस प्रकार वैश्लेषिक रूप से ही महत्वपूर्ण नहीं है, वरन् यह मिश्रित विलयनों में आयन विनिमय की वरणात्मकताओं के परिवर्तन का उदाहरण भी प्रस्तुत करता है।

निर्देश

1. सेम्युएलन, ओ। **आयन एक्सचेन्ज सैपारेशन्श इन एनालिटिकल केमिस्ट्री, विले प्रकाशन, न्यूयार्क**, 1963
2. हेल्फेरिच, एफ०। **एडवान्सेस इन क्रोमोमेटोग्राफी, भाग-1, सम्पादक, गिदिंग्स तथा केलर, डक्कर प्रकाशन, न्यूयार्क**, 1968
3. कोर्किश, जे०। **प्राग्रेस न्यूक्लियर केमि० एनल० केमि० सर्वि० भाग** 6 **पृ०** 1, **पर्गमान प्रकाशन, आक्सफोर्ड**, 1966
4. भटनागर, आर० पी०, तथा शुक्ला, आर० पी०। **एनल केम**, 1960 **32**, 777
5. भटनागर, आर० पी०, अरोरा, आर० सी० तथा राव, वी० जी०। **इंडियन जर्न० केमि०**, 1963, **1**, 154
6. भटनागर, आर० पी० तथा पेंडसे, वी० एम०। **इंडियन जर्न० केमि०**, 1963, **1**, 226
7. भटनागर, आर० पी० तथा अरोरा, आर० सी०। **इंडियन जर्न० केमि०**, 1964, **2**, 206; 1965, **3**, 89

8. भटनागर, आर० पी० तथा त्रिवेदी, आर० पी० । **जर्न० इंडियन केमि० सोसा०**, 1965, **42**, 53

9. भटनागर, आर० पी० तथा त्रिवेदी, आर० जी० । **इंडियन जर्न० केमि०**, 1967, **5**, 166

10. भटनागर, आर० पी० तथा सहयोगी । **टेलेन्टा** 1970, **17**, 249

11. गेवल, आर० डब्ल्यू० तथा स्ट्रावेल, एस० ए० । **जर्न० फिजि० केमि०**, 1956, **60**, 513

12. फ्रिट्ज, जे० एस० तथा पीटरजाईक, डी० जे० । **टेलेन्टा**, 1961, **8**, 143

13. फ्रिट्ज, जे० एस० तथा रिटिज, टी० ए० । **एना० केम०**, 1962, **34**, 1562

14. पीटरजाइक, डी० जे० तथा काइ-सर, डी० ए० । **एना० केम०**, 1965, **137**, 233

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 2, April, 1973, Pages 97-114

सार्वीकृत माइजर फलनों के फूरियर प्रसार सूत्र

मणिलाल शाह
गणित विभाग, पी० एम० बी० जी० कालेज, इन्दौर

[प्राप्त—अक्टूबर 6, 1972]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में सार्वीकृत माइजर फलन सम्बन्धी कतिपय समाकलों का मान ज्ञात किया गया है। इन समाकलों का उपयोग सार्वीकृत माइजर फलनों के लिये फूरियर प्रसार सूत्र प्राप्त करने के हेतु किया गया है। प्राचलों के उपयुक्त चुनाव द्वारा रोचक विशिष्ट दशायें प्राप्त की गई हैं। कुछ ज्ञात फल तथा आवर्ती सम्बन्ध भी निकाले गये हैं।

Abstract

Fourier expansion formulas for generalized Meijer functions. *By* Manilal Shah, Department of Mathematics, P. M. B. G. College, Indore

In this paper some integrals involving generalized Meijer functions have been evaluated. These integrals have been employed to obtain Fourier expansion formulas for generalized Meijer functions. Particular interesting cases have been derived with proper choice of parameters. Some known results and recurrence relation have been also obtaind.

1. भूमिका : दो चरों वाला सार्वीकृत माइजर फलन

शर्मा [(7), pp. 26—24] ने दो चरों वाले सार्वीकृत माइजर फलन को मेलिन-बार्नीज़ प्रकार के द्विगुण कंटूर समाकल के रूप में निम्न प्रकार से परिचित कराया है :

$$S\left[\begin{array}{l|c|c} \begin{bmatrix} p, & 0 \\ A-p, & B \end{bmatrix} & (a);\,(b) & \\ \begin{pmatrix} q, & r \\ C-q, & D-r \end{pmatrix} & (c);\,(d) & x\;y \\ \begin{pmatrix} k, & l \\ E-k, & F-l \end{pmatrix} & (e);\,(f) & \cdot \end{array}\right] \tag{1·1}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(a_j+s+t) \prod_{j=1}^{q} \Gamma(1-c_j+s) \prod_{j=1}^{r} \Gamma(d_j-s) \prod_{j=1}^{k} \Gamma(1-e_j+t) \prod_{j=1}^{l} \Gamma(f_j-t) x^s y^t}{\prod_{j=p+1}^{A} \Gamma(1-a_j-s-t) \prod_{j=1}^{B} \Gamma(b_j+s+t) \prod_{j=q+1}^{C} \Gamma(c_j-s) \prod_{j=r+1}^{D} \Gamma(1-d_j+s) \prod_{j=k=1}^{E} \Gamma(e_j-t) \prod_{j=l+1}^{F} \Gamma(1-f_j+t)} ds\, dt$$

जहाँ L_1 तथा L_2 उपयुक्त कंटूर हैं।

$A, B, C, \ldots$ धन पूर्णांक हैं जिनके द्वारा निम्नांकित असमिकायें तुष्ट होती हैं :

$$D \geqslant 1, F \geqslant 1, A \geqslant 1, B \geqslant 1,$$

$$0 \leqslant p \leqslant A,\ 0 \leqslant q \leqslant C,\ 0 \leqslant k \leqslant E,\ 0 \leqslant r \leqslant D,\ 0 \leqslant l \leqslant F,$$

$$A+C \leqslant B+D \text{ तथा } A+E \leqslant B+F$$

उपर्युक्त समाकल सुपारिभाषित है और वह अभिसारी होगा यदि

(i) $2(p+q+r) > A+B+C+D$, $|\arg(x)| < [(p+q+r)-(A+B+C+D)/2]\pi$,
$2(p+k+l) > A+B+E+F$, $|\arg(y)| < [(p+k+l)-(A+B+E+F)/2]\pi$;

(ii) If $A+C=B+D$, $A+E=B+F$, तो $|(x)| < R_1 \leqslant 1$, $|(y)| \leqslant R_2 \leqslant 1$ होना चाहिये।

$x=0$ तथा $y=0$ मानों का वहिष्कार किया गया है।

सुविधा की दृष्टि से हम संक्षिप्त संकेतों का प्रयोग करेंगे: (a) से A प्राचलों $a_1, a_2, \ldots, A_A$ का बोध होता है। इसी तरह (b), (c), (d), (e) तथा (f) संकेतों का भी। सार्वीकृत माइजर फलन (1·1) का सांकेतिक संक्षिप्तीकरण

$$s(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \Phi(s+t) \psi(s, t) x^s y^t\, ds\, dt,$$

होगा जहाँ

$$\Phi(s+t) = \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma[a_j+s+t]}{\prod_{j=p+1}^{A} \Gamma[1-a_j-s-t] \prod_{j=1}^{B} \Gamma[b_j+s+t]},$$

$$\psi(s,t)=\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(1-c_j+s)\prod_{j=1}^{r}\Gamma(d_j-s)\prod_{j=1}^{k}\Gamma(1-e_j+t)\prod_{j=1}^{l}\Gamma(f_j-t)}{\prod_{j=q+1}^{C}\Gamma(c_j-s)\prod_{j=r+1}^{D}\Gamma(1-d_j+s)\prod_{j=k+1}^{E}\Gamma(e_j-t)\prod_{j=l+1}^{F}\Gamma(1-f_j+t)}.$$

साथ ही, जहाँ भी यह आवेगा, अनेक प्राचलों के होने के कारण निम्नांकित संकेतों से श्रेणी

$$\triangle(m,n)=\frac{n}{m},\ \frac{n+1}{m},\ \ldots\ldots,\ \frac{n+m-1}{m},$$

$$\nabla(m,n)=1-\frac{n}{m},\ 1-\frac{n+1}{m},\ \ldots\ldots,\ 1-\frac{n+m-1}{m},$$

$$\triangle(m,n\pm p)=\frac{n+p}{m},\ \frac{n+p+1}{m},\ \ldots\ldots,\ \frac{n+p+m-1}{m},\ \frac{n-p}{m},\ \frac{n-p+1}{m},\ \ldots\ldots,\ \frac{n-p+m-1}{m},$$

का प्रतिनिधित्व होगा तथा संकेत $\Gamma(a\pm b)$ का व्यवहार $\Gamma(a+b)$ तथा $\Gamma(a-b)$ के लिये होगा।

2. उच्चतर कोटि का द्विगुण हाइपरज्यामितीय फलन

दो चरों वाले उच्चतर कोटि के द्विगुण हाइपरज्यामितीय फलन का अध्ययन कैंम्पे-द-फेरी [(3)] द्वारा किया जा चुका है।

$$F\left[\begin{array}{c|c|c} m & (a_m) & \\ l & (b_l);\ (b'_l) & x \\ n & (c_n) & y \\ p & (d_p);\ (d'_p) & \end{array}\right] \tag{1·2}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{m}(a_j)_{r+s}\prod_{j=1}^{l}\{(b_j)_r(b_j')_s\}}{r!\,s!\prod_{j=1}^{n}(c_j)_{r+s}\prod_{j=1}^{p}\{(d_j)_r(d_j')_s\}}x^r y^s,$$

जहाँ संकेत (a_m) से $a_1, a_2, \ldots, a_m$ के क्रम का तथा इसी प्रकार (b_l), (b_l'), (c_n), (d_p) तथा (d_p') के लिये और $|x|<1$, $|y|<1$, $m+l\leqslant n+p+1$ श्रेणी के परम अभिसरण का बोध होता है।

यदि $m+l<n+p+1$ तो F-फलन की श्रेणी x तथा y से समस्त संमिश्र मानों के लिये परम अभिसारी होती। है यदि $m+l=n+p+1$ हो तो यह x तथा y के ऐसे समस्त संमिश्र मानों के लिये अभिसारी होती है जिससे [रागाब 1963 (6)]

$$|x|+|y|<\min(1, 2^{n-m+1}),$$

प्राचल m, l, n, p को लाक्षणिक सूचकांक कहा जाता है और प्राचल $n+p$ तथा $[n+p+1-(m+l)]$ के द्वारा क्रमशः फलन की कोटि एवं श्रेणी सूचित होती है। अन्य हाइपरज्यामितीय फलनों की भाँति यहाँ भी किसी हर प्राचल को ऋण पूर्णांक नहीं होने दिया जाता।

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य सार्वीकृत माइजर फलन सम्बन्धी कतिपय समाकलों का मान ज्ञात करना है। इस समाकलों की सहायता से सार्वीकृत माइजर फलनों के लिये दो फूरियर श्रेणी सूत्रों की स्थापना की गई है। सार्वीकृत माइजर फलनों के लिये आवर्ती सम्बन्ध भी व्युत्पन्न किया गया है। इन प्राचलों के विशिष्टीकरण द्वारा कई नवीन, ज्ञात तथा रोचक फल प्राप्त किये गये हैं फलतः इस शोधपत्र के परिणाम व्यापक हैं।

2· समाकल

प्रथम समाकल :

$$\int_0^{\pi} \cos u\theta\,(\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{-2\xi}\, S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix} p, & o \\ A-p, & B\end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} q, & r \\ C-q, & D-r\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} k, & l \\ E-k, & F-l\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a);\,(b) \\ (c);\,(d) \\ (e);\,(f)\end{matrix}\right| x(\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}, y(\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}\right] d\theta \quad (2\cdot1)$$

$$=(-1)^u\sqrt{\left(\frac{\pi}{\rho}\right)}\, S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix} p+2\rho, & o \\ A-p, & B+2\rho\end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} q, & r \\ C-q, & D-r\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} k, & l \\ E-k, & F-l\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(\rho, \tfrac{1}{2}-\xi),\ \triangle(\rho, 1-\xi),\ (a); \\ \triangle(\rho, 1-\xi\pm u),\ (b) \\ (c);\,(d) \\ (e);\,(f)\end{matrix}\right| x, y\right]$$

द्वितीय समाकल :

$$\int_0^{\pi} \sin (2u+1)\theta\,(\sin \theta)^{1-2\xi}\, S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix} p, & o \\ A-p, & B\end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} q, & r \\ C-q, & D-r\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} k, & l \\ E-k, & F-l\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a);\,(b) \\ (c);\,(d) \\ (e);\,(f)\end{matrix}\right| x(\sin \theta)^{2\rho}, y(\sin \theta)^{2\rho}\right] d\theta \quad (2\cdot2)$$

$$=(-1)^u\sqrt{\left(\frac{\pi}{\rho}\right)}\, S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}p+2\rho, & o\\ A-p, & B+2\rho\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}q, & r\\ C-q, & D-r\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}k, & l\\ E-k, & F-l\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(\rho, 1-\xi), \triangle(\rho, \frac{3}{2}-\xi), (a);\\ \triangle(\rho, 2-\xi+u), \triangle(\rho, 1-\xi-u), (b)\\ (c); (d)\\ (e); (f)\end{matrix}\right|\, x, y\right]$$

जहाँ ρ धन पूर्णांक है, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, तथा

(i) $A+B+C+D<2(p+q+r)$, $|\arg(x)|<[(p+q+r)-(A+B+C+D)/2]\pi$,

$A+B+E+F<2(p+k+l)$, $|\arg(y)|<[(p+k+l)-(A+B+E+F)/2]\pi$;

$Re\,(1-2\xi+2\rho d_{h_1}+2\rho f_{h_2})\geqslant 0$, $h_1=1, 2, \ldots, r$; $h_2=1, 2, \ldots, l$.

(ii) $A+C<B+D$, $A+E<B+F$ $(A+C=B+D$, $A+E=B+F$, तो $|x|, |y|<1)$, $Re\,(1-2\xi+2\rho\, d_{h_1}+2\rho f_{h_2})\geqslant 0$, $h_1=1, 2, \ldots, r$; $h_2=1, 2, \ldots, l$.

उपपत्ति : (*A*) सूत्र (2.1) की स्थापना के लिये, सार्वीकृत माइजर फलन $S[x \sin\frac{1}{2}\theta)^{2\rho}$, $y(\sin\frac{1}{2}\theta)^{2\rho}]$ को (2.1) के समाकल्य में (1.1) से मेलिन-बार्नीज प्रकार के द्विगुण कंटूर समाकल के रूप में व्यक्त करने पर तथा समाकलन के क्रम को बदलने पर, जो (2.1) में कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत विहित है या प्रक्रम में निहित समाकलों की परम अभिसरणीयता के कारण हमें निम्नांकित की प्राप्ति होती है :

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\Phi(s+t)\psi(s, t)\left\{\int_0^{\pi}\cos u\theta\,(\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{-2\xi+2\rho s+2\rho t}\,d\theta\right\}x^s y^t\,ds\,dt.$$

अब ज्ञात फल [(4), p. 144] के द्वारा θ समाकल का मान ज्ञात करने पर

$$\int_0^{\pi}\cos r\theta\,(\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{-2\xi}\,d\theta=\frac{\pi\,\Gamma(\frac{1}{2}-\xi)(\xi; r)}{\Gamma(1/2)\Gamma(1-\xi)(1-\xi; r)},$$

जहाँ $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $(\xi; r)=\xi(\xi+1)\ldots(\xi+r-1)$, $r=1, 2, 3, \ldots, (\xi; 0)=1$ तथा निम्नांकित सम्बन्धों

$$\frac{\Gamma(1-\alpha-n)}{\Gamma(1-\alpha)}=\frac{(-1)^n}{(\alpha)_n},\quad (\alpha)_n=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$$

तथा गामा फलनों [(2), p. 4, (144)] के गॉस गुणन प्रमेय के लिये

$$\Gamma(mz)=(2\pi)^{1/2(1-m)}m^{mz-1/2}\prod_{i=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{i}{m}\right),\ m=2, 3, 4, \ldots,$$

का उपयोग करने पर हमें

$$(-1)^u\sqrt{\left(\frac{\pi}{\rho}\right)}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+s+t)\prod_{j=1}^{q}\Gamma(1-c_j+s)\prod_{j=1}^{r}\Gamma(d_j-s)\prod_{j=1}^{k}\Gamma(1-e_j+t)}{\prod_{j=p+1}^{A}\Gamma(1-a_j-s-t)\prod_{j=1}^{B}\Gamma(b_j+s+t)\prod_{j=q+1}^{C}\Gamma(c_j-s)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{l}\Gamma(f_j-t)\prod_{i=0}^{\rho-1}\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}-\xi+i}{\rho}+s+t\right)\prod_{i=0}^{\rho-1}\Gamma\left(\frac{1-\xi+i}{\rho}+s+t\right)x^sy^t}{\prod_{j=r+1}^{D}\Gamma(1-d_j+s)\prod_{j=k+1}^{E}\Gamma(e_j-t)\prod_{j=l+1}^{F}\Gamma(1-f_j+t)\prod_{i=0}^{\rho-1}\Gamma\left(\frac{1-\xi\pm u+i}{\rho}+s+t\right)}\,ds\,dt \tag{2·3}$$

प्राप्त होगा।

कंटूर L_1 S-तल पर है और लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक जाता है और यदि आवश्यकता हुई तो $\Gamma(d_j-s)$, $(j=1, 2, ..., r)$ के पोल कंटूर के दाईं ओर और $\Gamma(1-e_j+s)$, $(j=1, 2, ..., q)$ एवं $\Gamma(a_j+s+t), j=1, 2, ..., p$,

$$\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}-\xi+i}{\rho}+s+t\right), \Gamma\left(\frac{1-\xi+i}{\rho}+s+t\right), i=0, 1, ..., (\rho-1)$$

के पोल बाईं ओर स्थित रहते हैं।

इसी प्रकार t-तल में L_2 कंटूर में काल्पनिक अक्षि का एक अंश अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक विस्तीर्ण रहता है और जिससे यह आश्वस्तता रहती है कि $\Gamma(f_j-t)$, $(j=1, 2, ..., l)$ के पोल कंटूर के दाईं ओर तथा $\Gamma(1-e_j+t)$, $(j=1, 2, ..., k)$ एवं $\Gamma(a_j+s+t)$, $(j=1, 2, ..., p)$,

$$\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}-\xi+i}{\rho}+s+t\right), \Gamma\left(\frac{1-\xi+i}{\rho}+s+t\right), \{i=0, 1, ..., (\rho-1)\}$$

के पोल कंटूर के बाईं ओर स्थित हों।

सार्वीकृत माइजर फलन $S(x, y)$ की परिभाषा से तथा (2·3) की विवेचना से हमें समाकल (2·1) का मान प्राप्त होता है।

(B) उपर्युक्त विधि का ही सम्प्रयोग करने पर समाकल (2·2) की स्थापना की जा सकती है।

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\Phi(s+t)\psi(s, t)\left\{\int_0^\pi \sin\,(2u+1)\theta(\sin\theta)^{1-2\xi+2\rho s+2\rho t}\,d\theta\right\}x^sy^t\,ds\,dt.$$

अब ज्ञात फल (5), p 80.] की सहायता से θ समाकल का मान ज्ञात करने पर

$$\int_0^\pi \sin\,(2n+1)\theta(\sin\theta)^{1-2\xi}\,d\theta=\frac{\pi\Gamma(2-2\xi)(\xi; n)}{2^{1-2\xi}\Gamma(2-\xi)\Gamma(1-\xi)(2-\xi; n)},$$

जहाँ $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $R(1-2\xi)\geqslant 0$, तथा $(\xi;0)=1$, $(\xi;n)=\xi(\xi+1),\ldots\ldots\ldots\ldots,(\xi+n-1)$, $n=1,2,3,\ldots\ldots$

निम्नांकित सम्बन्धों का उपयोग करने पर

$$(a)_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)},\ (a)_{2n}=2^{2n}\left(\frac{a}{2}\right)_n\left(\frac{a+1}{2}\right)_n,\ \frac{\Gamma(1-a-n)}{\Gamma(1-a)}=\frac{(-1)^n}{(a)_n},$$

तथा गॉस के गुणन सूत्र इत्यादि से हमें

$$(-1)^u\sqrt{\left(\frac{\pi}{\rho}\right)}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\Phi(s+t)\psi(s,t)$$

$$\times\frac{\prod_{i=0}^{\rho-1}\Gamma\left(\frac{1-\xi+i}{\rho}+s+t\right)\prod_{i=0}^{\rho-1}\Gamma\left(\frac{\frac{3}{2}-\xi+i}{\rho}+s+t\right)}{\prod_{i=0}^{\rho-1}\Gamma\left(\frac{2-\xi+u+i}{\rho}+s+t\right)\prod_{i=0}^{\rho-1}\Gamma\left(\frac{1-\xi-u+i}{\rho}+s+t\right)}x^s y^t\,ds\,dt.$$

प्राप्त होगा जहाँ L_1 तथा L_2 उपयुक्त कंटूर हैं और जिनसे समाकल (2·2) का मान प्राप्त होता है।

3. सार्वीकृत माइजर फलनों के फूरियर श्रेणी प्रसार

प्रथम फूरियर श्रेणी :

$$(\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{-2\xi}\,S\left[\begin{array}{l|l|l}\begin{bmatrix}p, & o\\ A-p, & B\end{bmatrix} & (a);(b) & \\ \begin{pmatrix}q, & r\\ C-q, & D-r\end{pmatrix} & (c);(d) & x(\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}\ y(\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}\\ \begin{pmatrix}k, & l\\ E-k, & F-l\end{pmatrix} & (e);(f) & \end{array}\right] \tag{3·1}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{(\pi\rho)}}\sum_{V=0}^{\infty}(-1)^V S\left[\begin{array}{l|l|l}\begin{bmatrix}p+2\rho, & o\\ A-p, & B+2\rho\end{bmatrix} & \begin{array}{l}\triangle(\rho,\tfrac{1}{2}-\xi),\ \triangle(\rho,1-\xi),\ (a);\\ \triangle(\rho,1-\xi\pm V),\ (b)\end{array} & \\ \begin{pmatrix}q, & r\\ C-q, & D-r\end{pmatrix} & (c);(d) & x,\ y\\ \begin{pmatrix}k, & l\\ E-k, & F-l\end{pmatrix} & (e);(f) & \end{array}\right]\cos V\theta$$

द्वितीय फूरियर श्रेणी :

$$(\sin\theta)^{1-2\xi}\; S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}p, & o\\ A-p, & B\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}q, & r\\ C-q, & D-r\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}k, & l\\ E-k, & F-l\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a);\,(b)\\ (c);\,(d)\\ (e);\,(f)\end{matrix}\right| x(\sin\theta)^{2\rho}, y(\sin\theta)^{2\rho}\right] \qquad (3\cdot 2)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{(\pi\rho)}}\sum_{V=0}^{\infty}(-1)^V S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}p+2\rho, & o\\ A-q, & B+2\rho\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}q, & r\\ C-q, & D-r\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}k, & l\\ E-k, & F-l\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(\rho, 1-\xi),\ \triangle(\rho, \tfrac{3}{2}-\xi),\ (a);\\ \triangle(\rho, 2-\xi+V),\ \triangle(\rho, 1-\xi-V),\ (b)\\ (c);\,(d)\\ (e);\,(f)\end{matrix}\right| x, y\right]\sin(2V+1)\theta$$

जहाँ ρ धन पूर्णांक हैं $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ और निम्नांकित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत विहित है :

(i) $A+B+C+D<2(p+q+r)$, $|\arg(x)|<[(p+q+r)-(A+B+C+D)/2]\pi$,

$A+B+E+F<2(p+k+l)$, $|\arg(y)|<[(p+k+l)-(A+B+E+F)/2]\pi$;

$Re\,(1-2\xi+2\rho\, d_{h_1}+2\rho\, f_{h_2})\geqslant 0$, $h_1=1, 2, \ldots, r$; $h_2=1, 2, \ldots, l$.

(ii) $A+C<B+D$, $A+E<B+F (A+C=B+D,\ A+E=B+F)$ तो $|x|, |y|<1)$, $Re\,(1-2\xi+2\rho\, d_{h_1}+2\rho\, f_{h_2})\geqslant 0$, $h_1, 1, 2, \ldots, r$; $h_2=1, 2, \ldots, l$.

उपपत्ति

$\because$ $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ अतः माना कि

$$f(\theta)\equiv(\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{-2\xi}\; S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}p, & o\\ A-p, & B\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}q, & r\\ C-q, & D-r\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}k, & l\\ E-k, & F-l\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a);\,(b)\\ (c);\,(d)\\ (e);\,(f)\end{matrix}\right| x(\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}\ y(\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}\right]=\sum_{V=0}^{\infty}P_V\cos V\theta. \qquad (3\cdot 3)$$

समीकरण (3·3) विहित है क्योंकि $f(\theta)$ शतत है और खुले अन्तराल $(0, \pi)$ में परिबद्ध विचरण वाला है। अब (3·3) में दोनों ओर $\cos u\theta$ द्वारा गुणा करने तथा 0 से π तक θ के प्रति समाकलन करने पर और समाकलन तथा संकलन के क्रम को बदलने पर, जो कि विहित हैं, दाईं ओर हमें निम्नांकित मान मिलेगा :

$$\int_0^{\pi} \cos u\theta \, (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{-2\xi} \; S \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} p, & o \\ A-p, & B \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} q, & r \\ C-q, & D-r \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} k, & l \\ E-k, & F-l \end{pmatrix} \end{matrix} \left| \begin{matrix} (a);\,(b) \\ (c);\,(d) \\ (e);\,(f) \end{matrix} \right| \; x(\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}, y(\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho} \right] d\theta \qquad (3{\cdot}4)$$

$$= \sum_{V=0}^{\infty} P_V \int_0^{\pi} \cos u\theta \cos V\theta \, d\theta.$$

दाहिनी ओर तथा (3·4) के बाईं ओर के फल (2·1) में कोज्या फलनों के लाम्बिकता गुण का सम्प्रयोग करने पर

$$P_u = \frac{(-1)^{u_2}}{\sqrt{\{(\pi\rho)\}}} \; S \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} p+2\rho, & o \\ A-p, & B+2\rho \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} q, & r \\ C-q, & D-r \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} k, & l \\ E-k, & F-l \end{pmatrix} \end{matrix} \left| \begin{matrix} \triangle(\rho, \tfrac{1}{2}-\xi), \; \triangle(\rho, 1-\xi), \; (a); \\ \triangle(\rho, 1-\xi \pm u), \; (b) \\ (c);\,(d) \\ (e);\,(f) \end{matrix} \right| \; x, y \right]. \qquad (3{\cdot}5)$$

अब प्रसार सूत्र (3·1) की प्राप्ति (3·3) तथा (3·5) की सहायता से की जा सकती है।

द्वितीय फूरियर श्रेणी प्रसार सूत्र (3·2) को भी ऊपर की ही विधि का सम्प्रयोग करते हुए तथा ज्या फलनों एवं फल (2·2) के लाम्बिक सम्बन्ध का उपयोग करते हुये प्राप्त किया जा सकता है।

4. सम्प्रयोग

(1) (2·1), (3·1), (2·2) तथा (3·2) की विशिष्ट दशायें :

(i) $A=B=0$, रखने पर

$$\int_0^{\pi} \cos u\theta \, (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{-2\xi} \; G_{C,\,D}^{r,\,q}\left(x \{\sin \tfrac{1}{2}\theta\}^{2\rho} \,\middle|\, \begin{matrix}(c)\\(d)\end{matrix}\right) G_{E,\,F}^{l,\,k}\left(y \{\sin \tfrac{1}{2}\theta\}^{2\rho} \,\middle|\, \begin{matrix}(e)\\(f)\end{matrix}\right) d\theta \qquad (4{\cdot}1)$$

$$= (-1)^u \sqrt{\left(\frac{\pi}{\rho}\right)} \; S \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} 2\rho, & o \\ o, & 2\rho \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} q, & r \\ C-q, & D-r \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} k, & l \\ E-k, & F-l \end{pmatrix} \end{matrix} \left| \begin{matrix} \triangle(\rho, \tfrac{1}{2}-\xi), \; \triangle(\rho, 1-\xi); \\ \triangle(\rho, 1-\xi \pm u) \\ (c);\,(d) \\ (e);\,(f) \end{matrix} \right| \; x, y \right].$$

$$(\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{-2\xi}\, G^{r,\,q}_{C,\,D}\left(x\{\sin \tfrac{1}{2}\theta\}^{2\rho}\,\Big|\,\begin{matrix}(c)\\(d)\end{matrix}\right) G^{l,\,k}_{E,\,F}\left(y\{\sin \tfrac{1}{2}\theta\}^{2\rho}\,\Big|\,\begin{matrix}(e)\\(f)\end{matrix}\right) \tag{4·2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\{(\pi\rho)\}}}\sum_{V=0}^{\infty}(-1)^{V}\, S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}2\rho, & o\\ o, & 2\rho\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}q, & r\\ C-q, & D-r\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}k, & l\\ E-k, & F-l\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(\rho,\tfrac{1}{2}-\xi),\ \triangle(\rho,1-\xi);\\ \triangle(\rho,1-\xi\pm V)\\ (c);\ (d)\\ (e);\ (f)\end{matrix}\right|\, x, y\right]\cos V\theta$$

$$\int_0^{\pi}\sin(2u+1)\theta(\sin\theta)^{1-2\xi}\, G^{r,\,q}_{C,\,D}\left(x\{\sin\theta\}^{2\rho}\,\Big|\,\begin{matrix}(c)\\(d)\end{matrix}\right) G^{l,\,k}_{E,\,F}\left(y\{\sin\theta\}^{2\rho}\,\Big|\,\begin{matrix}(e)\\(f)\end{matrix}\right) d\theta$$

$$=(-1)^{u}\sqrt{\left(\frac{\pi}{\rho}\right)}\, S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}2\rho, & o\\ o, & 2\rho\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}q, & r\\ C-q, & D-r\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}k, & l\\ E-k, & F-l\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(\rho,1-\xi),\ \triangle(\rho,\tfrac{3}{2}-\xi);\\ \triangle(\rho,2-\xi+u),\ \triangle(\rho,1-\xi-u)\\ (c);\ (d)\\ (e);\ (f)\end{matrix}\right|\, x, y\right] \tag{4·3}$$

$$(\sin\theta)^{1-2\xi}\, G^{r,\,q}_{C,\,D}\left(x\{\sin\theta\}^{2\rho}\,\Big|\,\begin{matrix}(c)\\(d)\end{matrix}\right) G^{l,\,k}_{E,\,F}\left(y\{\sin\theta\}^{2\rho}\,\Big|\,\begin{matrix}(e)\\(f)\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{(\pi\rho)}}\sum_{V=0}^{\infty}(-1)^{V}\, S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}2\rho, & o\\ o, & 2\rho\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}q, & r\\ C-q, & D-r\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}k, & l\\ E-k, & F-l\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(\rho,1-\xi),\ \triangle(\rho,\tfrac{3}{2}-\xi);\\ \triangle(\rho,2-\xi+V),\ \triangle(\rho,1-\xi-V)\\ (c);\ (d)\\ (e);\ (f)\end{matrix}\right|\, x, y\right]\sin(2V+1)\theta \tag{4·4}$$

जहाँ $G^{m,\,n}_{p,\,q}\left(x\,\Big|\,\begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right)$ माइजर G-फलन [(2), p. 207 (1)] है तथा ρ धन पूर्णांक है $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ और निम्नांकित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत विहित है :

(i) $2(q+r)>C+D$, $|\arg(x)|<[(q+r)-(C+D)/2]\pi$,

$2(l+k)>E+F$, $|\arg(y)|<[(l+k)-(E+F)/2]\pi$.

$Re\,(1-2\xi+2\rho d_{h_1}+2\rho f_{h_2})\geqslant 0$, $h_1=1, 2, \ldots, r$; $h_2=1, 2, \ldots, l$.

(ii) $C<D$, $E<F$ (यदि $C=D$, $E=F$, तो $|x|<1$, $|y|<1$),

$Re\,(1-2\xi+2\rho d_{h_1}+2\rho f_{h_2})\geqslant 0$, $h_1=1, 2, \ldots, r$; $h_2=1, 2, \ldots, l$.

(2) $A=p,\ E=k,\ l=1,\ f_1=0$ रखने पर तथा $A+C$ को A द्वारा, $B+D$ को B द्वारा $A+q$ को S द्वारा प्रतिस्थापित करने पर और प्राचलों में उपयुक्त परिवर्तन लाने पर माना कि $y\to 0$ तब

$$\int_0^\pi \cos u\theta (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{-2\xi}\, G_{A,\ B}^{r,\ S}\left(x\{\sin \tfrac{1}{2}\theta\}^{2\rho}\,\middle|\,\begin{matrix}(a)\\(b)\end{matrix}\right) d\theta \tag{4·5}$$

$$=(-1)^u\sqrt{\left(\frac{\pi}{\rho}\right)}\, G_{A+2\rho,\ B+2\rho}^{r,\ S+2\rho}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}\nabla(\rho,\tfrac{1}{2}-\xi),\ \nabla(\rho,1-\xi),\ (a)\\(b),\ \nabla(\rho,1-\xi\pm u)\end{matrix}\right)$$

$$(\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{-2\xi}\, G_{A,\ B}^{r,\ S}\left(x\{\sin \tfrac{1}{2}\theta\}^{2\rho}\,\middle|\,\begin{matrix}(a)\\(b)\end{matrix}\right) \tag{4·6}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{(\pi\rho)}}\sum_{V=0}^{\infty}(-1)^V\, G_{A+2\rho,\ B+2\rho}^{r,\ S+2\rho}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}\nabla(\rho,\tfrac{1}{2}-\xi),\ \nabla(\rho,1-\xi),\ (a)\\(b),\ \nabla(\rho,1-\xi\pm V)\end{matrix}\right)\cos V\theta.$$

$$\int_0^\pi \sin(2u+1)\theta\,(\sin\theta)^{1-2\xi}\, G_{A,\ B}^{r,\ S}\left(x\{\sin\theta\}^{2\rho}\,\middle|\,\begin{matrix}(a)\\(b)\end{matrix}\right) d\theta \tag{4·7}$$

$$=(-1)^u\sqrt{\left(\frac{\pi}{\rho}\right)}\, G_{A+2\rho,\ B+2\rho}^{r,\ S+2\rho}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}\nabla(\rho,1-\xi),\ \nabla(\rho,\tfrac{3}{2}-\xi),\ (a)\\(b),\ \nabla(\rho,2-\xi+u),\ \nabla(\rho,1-\xi-u)\end{matrix}\right).$$

$$(\sin\theta)^{1-2\xi}\, G_{A,\ B}^{r,\ S}\left(x\{\sin\theta\}^{2\rho}\,\middle|\,\begin{matrix}(a)\\(b)\end{matrix}\right) \tag{4·8}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\{(\pi\rho)\}}}\sum_{V=0}^{\infty}(-1)^V\, G_{A+2\rho,\ B+2\rho}^{r,\ S+2\rho}\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}\nabla(\rho,1-\xi),\ \nabla(\rho,\tfrac{3}{2}-\xi),\ (a)\\(b),\ \nabla(\rho,2-\xi+V),\ \nabla(\rho,1-\xi-V)\end{matrix}\right)\sin(2V+1)\theta.$$

जो विहित है यदि ρ धन पूर्णांक हो, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ हो और

(i) $2(r+s)>A+B,\ |\arg(x)|<[(r+s)-(A+B)/2]\pi$,
$Re\,(1-2\xi+2\rho\, b_h)\geqslant 0,\ h=1,2,\ldots,r.$

(ii) $A<B$(या $A=B,\ |x|<1$),
$Re\,(1-2\xi+2\rho b_h)>0,\ h=1,2,\ldots,r.$

(3) $p=A=m, B=n, q=k=C=E=l, r=l=1, D=F=p+1, d_1=f_1=0$ रखने पर $b_j, 1-c_j, 1-d_j, 1-e_j$ तथा $1-f_j$ को क्रमशः c_j, b_j, d_j, b'_j तथा d'_j द्वारा प्रतिस्थापित करने पर सार्वीकृत माइजर फलन $S(x,y)$ कैम्पे-द-फेरी के द्विगुण हाइपरज्यामितीय फलन (1·2) में घटित हो जाता है। इस प्रकार हमें निम्नांकित फल प्राप्त होता है :

$$\int_0^\pi \cos u\theta\, (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{-2\xi}\, F\left[\begin{array}{c|c|c} m & (a_m) & \\ l & (b_l);\, (b'_e) & \\ n & (c_n) & x\{\sin \tfrac{1}{2}\theta\}^{2\rho},\ y\{\sin \tfrac{1}{2}\theta\}^{2\rho} \\ p & (d_t);\, (d'_p) & \end{array}\right] d\theta \tag{4·9}$$

$$=(-1)^u \sqrt{\left(\frac{\pi}{\rho}\right)} \frac{\prod_{i=0}^{\rho-1} \left(\frac{1-2\xi+2i}{2\rho}\right) \prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{1-\xi+i}{\rho}\right)}{\prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{1-\xi\pm u+i}{\rho}\right)}$$

$$\times F\left[\begin{array}{c|c|c} m+2\rho & (a_m),\ \triangle(\rho, \tfrac{1}{2}-\xi),\ \triangle(\rho, 1-\xi) & \\ l & (b_l);\, (b'_l) & \\ n+2\rho & (e_n),\ \triangle(\rho, 1-\xi\pm u) & x, y \\ p & (d_p);\, (d'_p) & \end{array}\right]$$

$$(\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{-2\xi}\, F\left[\begin{array}{c|c|c} m & (a_m) & \\ l & (b_l);\, (b'_l) & \\ n & (c_n) & x\{\sin \tfrac{1}{2}\theta\}^{2\rho}, y\{\sin \tfrac{1}{2}\theta\}^{2\rho} \\ p & (d_p);\, (d'_p) & \end{array}\right] \tag{4·10}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{(\pi\rho)}} \prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{1-2\xi+2i}{2\rho}\right) \prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{1-\xi+i}{\rho}\right) \sum_{V=0}^{\infty} \frac{(-1)^V}{\prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{1-\xi\pm V+i}{\rho}\right)}$$

$$\times F\left[\begin{array}{c|c|c} m+2\rho & (a_m),\ \triangle(\rho, \tfrac{1}{2}-\xi),\ \triangle(\rho, 1-\xi) & \\ l & (b_l);\, (b'_l) & \\ n+2\rho & (c_n),\ \triangle(\rho, 1-\xi\pm V) & x, y \\ p & (d_p);\, (d'_p) & \end{array}\right] \cos V\theta.$$

$$\int_0^\pi \sin (u+1)\theta\, (2\sin \theta)^{1-2\xi}\, F\left[\begin{array}{c|c|c} m & (a_m) & \\ l & (b_l);\, (b'_l) & \\ n & (c_n) & x\{\sin \theta\}^{2\rho}, y\{\sin \theta\}^{2\rho} \\ p & (d_p);\, (d'_p) & \end{array}\right] d\theta \tag{4·11}$$

$$=(-1)^u \sqrt{\left(\frac{\pi}{\rho}\right)} \frac{\prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{1-\xi+i}{\rho}\right) \prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{3-2\xi+2i}{2\rho}\right)}{\prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{2-\xi+u+i}{\rho}\right) \prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{1-\xi-u+i}{\rho}\right)}$$

$$F\left[\begin{array}{c|c|c} m+2\rho & (a_m),\ \triangle(\rho,\ 1-\xi),\ \triangle(\rho,\ \tfrac{3}{2}-\xi) & \\ l & (b_l);\ (b'_l) & \\ n+2\rho & (c_n),\ \triangle(\rho,\ 2-\xi+u),\ \triangle(\rho,\ 1-\xi-u) & x, y \\ p & (d_p);\ (d'_p) & \end{array}\right]$$

$$(\sin\theta)^{1-2\xi} F\left[\begin{array}{c|c|c} m & (a_m) & \\ l & (b_l);\ (b'_l) & \\ n & (c_n) & x\{\sin\theta\}^{2\rho}, y\{\sin\theta\}^{2\rho} \\ p & (d_p);\ (d'_p) & \end{array}\right] \tag{4·12}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{(\pi\rho)}} \prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{1-\xi+i}{\rho}\right) \prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{3-2\xi+2i}{2\rho}\right)$$

$$\sum_{V=0}^{\infty} \frac{(-1)^V}{\prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{2-\xi+V+i}{\rho}\right) \prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{1-\xi-V+i}{\rho}\right)}$$

$$\times F\left[\begin{array}{c|c} m+2\rho & (a_m),\ \triangle(\rho,\ 1-\xi),\ \triangle(\rho,\ \tfrac{3}{2}-\xi) \\ l & (b_l);\ (b'_l) \\ n+2\rho & (c_n),\ \triangle(\rho,\ 2-\xi+V),\ \triangle(\rho,\ 1-\xi-V) \\ p & (d_p);\ (d'_p) \end{array}\right] \sin(2V+1)\theta$$

जहाँ ρ धन पूर्णांक, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ है और यदि $(m+l)<(n+p+1)$, $\{(m+l=n+p+1;$ तो $|x|, |y|<1)\}$, $Re\ (1-2\xi) \geqslant 0$.

या यदि $m+l+1>n+p$, तो

$$|\arg(y)|, |\arg(x)| < (m+l-n-p)\tfrac{1}{2}\pi.$$

(*A*) (4·9) **तथा** (4·12) **की विशिष्ट दशायें :**

(i) प्राचलों को ठीक से योजित करने पर द्विगुण हाइपरज्यामितीय फलन F को ऐपेल के [(1)] चार फलनों F_1, F_2, F_3 तथा F_4 में परिणत किया जा सकता है और हमें कई रोचक परिणाम प्राप्त हो सकते हैं।

(ii) $m=n$, $l=1$, $p=0$ तथा $y=x$, होने पर फलन F एकाकी चर वाले सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों में परिणत हो जाते हैं। इस प्रकार से हमें

$$\int_0^\pi \cos u\theta \, (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{-2\xi} \; {}_{p+1}F_p\left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p, \; b+b'; \; x(\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho} \\ c_1, \ldots, c_p \end{matrix}\right] d\theta \tag{4·13}$$

$$=(-1)^u \sqrt{\left(\frac{\pi}{\rho}\right)} \frac{\prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{1-2\xi+i}{2\rho}\right) \prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{1-\xi+i}{\rho}\right)}{\prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{1-\xi\pm u+i}{\rho}\right)}$$

$$\times {}_{p+2\rho+1}F_{p+2\rho}\left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p, \; \triangle(\rho, \tfrac{1}{2}-\xi), \; \triangle(\rho, 1-\xi), \; b+b' \\ c_1, \ldots, c_p, \; \triangle(\rho, 1-\xi\pm u) \end{matrix}; x\right]$$

$$(\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{-2\xi} \; {}_{p+1}F_p\left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p, \; b+b' \\ c_1, \ldots, c_p \end{matrix}; x(\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}\right] \tag{4·14}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{(\pi\rho)}} \prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{1-2\xi+2i}{2\rho}\right) \prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{1-\xi+i}{\rho}\right) \sum_{V=0}^{\infty} \frac{(-1)^V}{\prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{1-\xi\pm V+i}{\rho}\right)}$$

$$\times {}_{p+2\rho+1}F_{p+2\rho}\left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \; \triangle(\rho, \tfrac{1}{2}-\xi), \; \triangle(\rho, 1-\xi), \; b+b' \\ c_1, \ldots, c_p, \; \triangle(\rho, 1-\xi\pm V) \end{matrix}; x\right] \cos V\theta.$$

$$\int_0^\pi \sin\,(2u+1)\theta (\sin\theta)^{1-2\xi} \; {}_{p+1}F_p\left[\begin{matrix} a_1, \ldots; a_p, \; b+b' \\ c_1, \ldots, c_p \end{matrix}; x(\sin\theta)^{2\rho}\right] d\theta \tag{4·15}$$

$$=(-1)^n \sqrt{\left(\frac{\pi}{\rho}\right)} \frac{\prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{1-\xi+i}{\rho}\right) \prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{3-2\xi+2i}{2\rho}\right)}{\prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{2-\xi+u+i}{\rho}\right) \prod \Gamma\left(\frac{1-\xi-u+i}{\rho}\right)}$$

$$\times {}_{p+2\rho+1}F_{p+2\rho}\left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p, \; \triangle(\rho, 1-\xi), \; \triangle(\rho, \tfrac{3}{2}-\xi), \; b+b' \\ c_1, \ldots, c_p, \; \triangle(\rho, 2-\xi+u), \; \triangle(\rho, 1-\xi-u) \end{matrix}; x\right]$$

$$(\sin\theta)^{1-2\xi} \; {}_{p+1}F_p\left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p, \; b+b' \\ c_1, \ldots, c_p \end{matrix}; x(\sin\theta)^{2\rho}\right] \tag{4·16}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{(\pi\rho)}} \prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{1-\xi+i}{\rho}\right) \prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{3-2\xi+2i}{2\rho}\right)$$

$$\sum_{V=0}^{\infty} \frac{(-1)^V}{\prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{2-\xi+V+i}{\rho}\right) \prod_{i=0}^{\rho-1} \Gamma\left(\frac{1-\xi-V+i}{\rho}\right)}$$

$$\times {}_{p+2\rho+1}F_{p+2\rho}\left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p, \; \triangle(\rho, 1-\xi), \; \triangle(\rho, \tfrac{3}{2}-\xi), \; b+b' \\ c_1, \ldots, c_p, \; \triangle(\rho, 2-\xi+V), \; \triangle(\rho, 1-\xi-V) \end{matrix}; x\right] \sin\,(2V+1)\theta$$

प्राप्त होंगे जहाँ ρ धन पूर्णांक, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ है तथा $Re\,(1-2\xi) \geqslant 0$ है,

(*B*) (2·1) **तथा** (3·1) **की विशिष्ट दशायें :**

$2\xi = -V,\ \theta = 2\phi;\ \rho = \delta$ मानने पर और ज्ञात फल

$$\Gamma(z)\ \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

का उपयोग करने पर हमें ज्ञात फलों [(8), (2·1) और (3·1)] की प्राप्ति होती है।

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2u\phi\ (\sin\phi)^V\ S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}p, & o\\ A-p, & B\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}q, & r\\ C-q, & D-r\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}k, & l\\ E-k, & F-l\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a);\ (b)\\ (c);\ (d)\\ (e);\ (f)\end{matrix}\right| x\{\sin\phi\}^{2\delta}, y\{\sin\phi\}^{2\delta}\right] d\phi$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2} \pm u)}{2\sqrt{(\pi\delta)}}\ S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}p+2\delta, & o\\ A-p, & B+2\delta\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}q, & r\\ C-q, & D-r\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}k, & l\\ E-k, & F-l\end{bmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle\left(\delta, \frac{V+1}{2}\right), \triangle\left(\delta, \frac{V+2}{2}\right), (a);\\ \triangle\ \delta, \frac{1}{2}V \pm u+1), \qquad (b)\\ (c);\ (d)\\ (e);\ (f)\end{matrix}\right| x, y\right]$$

तथा

$$(\sin\phi)^V\ S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}p, & o\\ A-p, & B\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}q, & r\\ C-q, & D-r\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}k, & l\\ E-k, & F-l\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a);\ (b)\\ (c);\ (d)\\ (e);\ (f)\end{matrix}\right| x(\sin\phi)^{2\delta}, y(\sin\phi)^{2\delta}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{(\pi\delta)}} \sum_{\xi=0}^{\infty} \Gamma(\tfrac{1}{2} \pm \xi)\ S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}p+2\delta, & o\\ A-p, & B+2\delta\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}q, & r\\ C-q, & D-r\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}k, & l\\ E-k, & F-l\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle\left(\delta, \frac{V+1}{2}\right), \triangle\left(\delta, \frac{V+2}{2}\right), (a);\\ \triangle(\delta, \frac{1}{2}V \pm \xi+1).\ (b)\\ (c);\ (d)\\ (e);\ (f)\end{matrix}\right| x, y\right] \cos 2\xi\phi$$

जो दिये हुये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत है ।

5. आवर्ती सम्बन्ध

इस अनुभाग में सार्वीकृत माइजर फलनों का आवर्ती सम्बन्ध दिया जा रहा है ।

(2·1) तथा (2·2), में $\xi=0$ रखने पर

$$\int_0^{\pi} \cos u\theta\, S\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{bmatrix} p, & o \\ A-p, & B \end{bmatrix} & (a);\ (b) & \\ \begin{pmatrix} q, & r \\ C & q, D-r \end{pmatrix} & (c);\ (d) & x\{\sin \tfrac{1}{2}\theta\}^{2\rho}, y\{\sin \tfrac{1}{2}\theta\}^{2\rho} \\ \begin{pmatrix} k, & l \\ E-k, & F-l \end{pmatrix} & (e);\ (f) & \end{array}\right] d\theta \tag{5·1}$$

$$=(-1)^u \sqrt{\left(\frac{\pi}{\rho}\right)}\, S\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{bmatrix} p+2\rho, & o \\ A-p. & B+2\rho \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \triangle(\rho, \tfrac{1}{2}),\ \triangle(\rho, 1),\ (a); \\ \triangle(\rho, 1\pm u),\qquad (b) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} q, & r \\ C-q, & D-r \end{pmatrix} & (c);\ (d) & x, y \\ \begin{pmatrix} k, & l \\ E-k, & F-l \end{pmatrix} & (e);\ (f) & \end{array}\right].$$

$$\int_0^{\pi} \sin (2u+1)\theta \sin\theta\, S\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{bmatrix} p, & o \\ A-p, & B \end{bmatrix} & (a);\ (b) & \\ \begin{pmatrix} q, & r \\ C-q, & D-r \end{pmatrix} & (c);\ (d) & x\{\sin\theta\}^{2\rho}\ y\{\sin\theta\}^{2\rho} \\ \begin{pmatrix} k, & l \\ E-k, & F-l \end{pmatrix} & (e);\ (f) & \end{array}\right] d\theta \tag{5·2}$$

$$=(-1)^n \sqrt{\left(\frac{\pi}{\rho}\right)}\, S\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{bmatrix} p+2\rho, & o \\ A-p, & B+2\rho \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \triangle(\rho, 1),\ \triangle(\rho, \tfrac{3}{2}),\ (a); \\ \triangle(\rho, 2+u),\ \triangle(\rho, 1-u),\ (b) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} q, & r \\ C-q, & D-r \end{pmatrix} & (c);\ (d) & x, y \\ \begin{pmatrix} k, & l \\ E-k, & F-l \end{pmatrix} & (e);\ (f) & \end{array}\right]$$

जहाँ $u=0, 1, 2, \ldots,$ तथा दिये हुये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत विहित है ।

अब (5·1) के समाकल को

$$2\int_0^{\pi/2} \cos 2u\phi \; S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}p, & o\\ A-p, & B\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}q, & r\\ C-q, & D-r\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}k, & l\\ E-k, & F-l\end{pmatrix}\end{matrix}\middle| \begin{matrix}(a);\ (b)\\ (c);\ (d)\\ (e);\ (f)\end{matrix}\middle| x(\sin\phi)^{2\rho},\ y(\sin\phi)^{2\rho}\right] d\phi$$

के रूप में लिखा जा सकता है और चूँकि यह 0 से π तक उसी समाकल के तुल्य है अतः (5·1) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\int_0^{\pi} \cos 2u\phi \; S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}p, & o\\ A-p, & B\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}q, & r\\ C-q, & D-r\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}k, & l\\ E-k, & F-l\end{pmatrix}\end{matrix}\middle| \begin{matrix}(a);\ (b)\\ (c);\ (d)\\ (e);\ (f)\end{matrix}\middle| x(\sin\phi)^{2\rho};\ y(\sin\phi)^{2\rho}\right] d\phi \qquad (5\cdot3)$$

$$= (-1)^{\mu}\sqrt{\left(\frac{\pi}{\rho}\right)}\; S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}p+2\rho, & o\\ A-p, & B+2\rho\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}q, & r\\ C-q, & D-r\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}k, & l\\ E-k, & F-l\end{pmatrix}\end{matrix}\middle| \begin{matrix}\triangle(\rho,\tfrac{1}{2}),\ \triangle(\rho,1),\ (a);\\ \triangle(\rho,1-u),\ \triangle(\rho,1+u),\ (b)\\ (c);\ (d)\\ (e);\ (f)\end{matrix}\middle| x, y\right]$$

अतः (5·2) में $\sin(2u+1)\theta\sin\theta$ को $\frac{1}{2}\{\cos 2u\theta-\cos(2u+2)\theta\}$ के रूप में लिखने पर तथा (5·3) का सम्प्रयोग करने पर हमें सार्वीकृत माइजर फलनों का आवर्ती सम्बन्ध प्राप्त होता है।

$$S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}p+2\rho, & o\\ A-p, & B+2\rho\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}q, & r\\ C-q, & D-r\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}k, & l\\ E-k, & F-l\end{pmatrix}\end{matrix}\middle| \begin{matrix}\triangle(\rho,\tfrac{1}{2}),\ \triangle(\rho,1),\ (a);\\ \triangle(\rho,1\pm u),\ (b)\\ (c);\ (d)\\ (e);\ (f)\end{matrix}\middle| \begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right] \qquad (5\cdot4)$$

$$+S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}p+2\rho, & o\\ A-p, & B+2\rho\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}q, & r\\ C-q, & D-r\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}k, & l\\ E-k, & F-r\end{pmatrix}\end{matrix}\middle| \begin{matrix}\triangle(\rho,\tfrac{1}{2}),\ \triangle(\rho,1),\ (a);\\ \triangle(\rho,-u),\ \triangle(\rho,2+u),\ (b)\\ (c);\ (d)\\ (e);\ (f)\end{matrix}\middle| \begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right]$$

$$=2\ S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}p+2\rho, & o\\ A-p, & B+2\rho\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}q, & r\\ C-q, & D-r\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}k, & l\\ E-k, & F-e\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(\rho, 1),\ \triangle(\rho, \tfrac{3}{2}),\ (a);\\ \triangle(\rho, 2+u),\ \triangle(\rho, 1-u),\ (b)\\ (c);\ (d)\\ (e);\ (f)\end{matrix}\right|\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right]$$

जहाँ ρ धन पूर्णांक है ।

निर्देश

1. ऐपेल, पाल तथा कैम्पे-द-फेरी, जे० । Fonctions Hypergéome'triques et Hypersphériques; polynomes d' Hermites, पेरिस, गाथियर-विलार्स, 1926
2. एर्डेल्यी, ए० । Higher transcendental functions, **भाग** I, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क** 1953
3. कैम्पे-द-फेरी, जे० । La Fonction Hypergéomé'trique, **पेरिस-गाथियर विलार्स**, 1937
4. मैकराबर्ट, टी० एम० । **मैथ० जाइत्सक्रि०**, 1959, **71**, 142-145
5. वही । **वही**, 1961, **75**, 79-82
6. रागाब, एफ० एम० । J. reine angew. Math., 1963, **212**, 113-119
7. शर्मा, बी० एल० । Annals de soc. sci. de Bruxelles, 1965, **79**, 10-26
8. शाह, मणिलाल । Analeee Stiintifice Ale Universita T. II., AL. I CUZA" I ASI Sect. I a Matematica, Tomul. XVI, ANUL 1970, Fasc. 2, 293-313

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 2, April 1973, Pages 115-117

भारतीय मिट्टियों में टाइटेनियम की मात्रा

शिवगोपाल मिश्र तथा नरेन्द्र त्रिपाठी
कृषि रसायन शाखा, रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—अप्रैल 1, 1971]

सारांश

लाल, काली, जलोढ, क्षारीय तथा कैल्सियमयुक्त मिट्टियों के सतही नमूनों तथा परिच्छेदिकाओं में सम्पूर्ण टाइटेनियम की मात्रा ज्ञात की गई। इन मिट्टियों में प्रति दशलक्षांश पर 1220 से 8525 अंश Ti पाया गया। सर्वाधिक टाइटेनियम काली मिट्टियों में और सबसे कम कैल्सियमयुक्त मिट्टियों में पाया गया। परिच्छेदिकाओं में Ti की मात्रा लाल मिट्टियों में गहराई के अनुसार बढ़ी किन्तु अन्यों में इसके विपरीत मान मिले।

Abstract

Titanium status of Indian soils. *By* S. G. Misra and N. Tripathi, Agricultural Chemistry Section, Department of Chemistry, University of Allahabad.

Surface samples and profiles from red, black, alluvial, alkali and calcareous soils from various parts of U.P., M. P. and Bihar were analysed for their total titanium. Tolal Ti was found to vary from 1220 to 8525 ppm. Black soils analysed maximum Ti and calcareous soils the least. The content of Ti increased with depth in red soil profiles but contrary results were obtained in other profiles.

भारतीय मिट्टियों में टाइटेनियम की मात्रा सूचित करने वाले आँकड़ों का अभाव है अतः उत्तर प्रदेश, मध्यप्रदेश तथा बिहार के विभिन्न स्थानों से मिट्टियों के सतही तथा परिच्छेदिकाओं के नमूने एकत्र करके टाइटेनियम की मात्रा ज्ञात की गई।

प्रयोगात्मक

कुल 48 सतही नमूने तथा 8 परिच्छेदिकाओं के नमूने एकत्र किये गये। ये नमूने पाँच प्रकार की मिट्टियों के थे-लाल, काली, जलोढ क्षारीय तथा कैल्सियमयुक्त (भाट)। इनके कमशः 10, 10, 10, 8

तथा 10 सतही नमूने लिये गये। परिच्छेदिकाओं की संख्या इस प्रकार थी। लाल मिट्टी की 2, काली मिट्टी की 2, जलोढ की 3 तथा भाट की 1, इस प्रकार कुल मिलाकर 8 परिच्छेदिकायें ली गईं। नमूनों को सुखाकर, चालकर, उनमें ब्लैक की विधि[1] से टाइटेनियम की मात्रा ज्ञात की गई। इस विधि में रंग किसित करने के लिये हाइड्रोजन परॉक्साइड का उपयोग किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

सतही नमूने

विभिन्न मिट्टियों में सम्पूर्ण टाइटेनियम की मात्रा 1220 से 8525 अंश/दशलक्षांश तक पाई गई। लाल मिट्टियों में यह मात्रा 3620 से 7160 अंश/दशलक्षांश (औसत 5208), काली मिट्टियों में 6988 से 8525 (औसत 7586), जलोढ मिट्टियों में 2170 से 3630 (औसत 2914); क्षारीय मिट्टियों में 1710 से 3380 (औसत 2456) तथा कैल्सियमयुत मिट्टियों में 1220 से 2770 (औसत 2048) अंश/प्रतिदशलक्षांश मिली। विभिन्न प्रकार की मिट्टियों को उनकी Ti मात्रा के अनुसार निम्नांकित क्रम में लिखा जा सकता है :

काली मिट्टियाँ > लाल मिट्टियाँ > जलोढ > क्षारीय > भाट

परिच्छेदिकायें

विभिन्न मिट्टियों की परिच्छेदिकाओं के कई स्तरों में Ti की मात्रा ज्ञात की गई। यह देखा गया कि लाल मिट्टी में टाइटेनियम की मात्रा गहराई के साथ बढ़ती जाती है। यही क्रम सेस्क्वी-आक्साइडों में भी देखा जाता है। परिच्छेदिकाओं में ऊपरी स्तर में Ti की मात्रा 5250 से लेकर 6587 अंश/दशलक्षांश पाई गई किन्तु निचले स्तरों में (83—150 सेमी० पर) यह मात्रा बढ़कर 9585 अंश/दशलक्षांश हो गई।

उल्लेखनीय बात यह है कि काली मिट्टी की जिन दो परिच्छेदिकाओं में Ti की मात्रा ज्ञात की गई उन दोनों में Ti की मात्रा नीचे की ओर घटती गई। उदाहरणार्थ ऊपरी स्तर में 6050 से 7536 अंश Ti पाया गया किन्तु निचले स्तरों में यह मात्रा 5415 से 6050 अंश/दशलक्षांश हो गई। जलोढ तथा भाट मिट्टियों में भी काली मिट्टी के समान Ti की मात्रा नीचे की ओर घटती गई।

स्पष्ट है कि परीक्षित मिट्टियों में टाइटेनियम की मात्रा में अन्तर है जिसका कारण मिट्टियों के मूल शैलों की रचना तथा मिट्टियों का विकास है। टाइटेनियम की उपयोगिता मिट्टी में फास्फेट के रूपान्तरण के प्रसंग में मानी जाती है। काली तथा लाल मिट्टियाँ इस तत्व में धनी हैं। जलोढ मिट्टियों में भी प्रचुर टाइटेनियम है किन्तु भाट मिट्टियों में इसकी मात्रा अपेक्षतया काफी कम है अतः इन दो प्रकार की मिट्टियों में फास्फेट की अप्राप्यता में Ti का प्रभाव कम होना चाहिए।

निर्देश

1. ब्लैक, सी० ए०। Methods of Soil Analysis भाग, I, मैडिसन, विस्कान्सिन, यू० एस० ए०, 1965

सारणी 1

परिच्छेदिकाओं में Ti का वितरण

मिट्टी	गहराई	Ti अंश/दशलक्षांश	TiO_2%
लाल मिट्टियाँ			
	(1) 0–15 सेमी०	5250	1·095
	15–55	8160	1·702
	55–83	8790	1·834
	83–150	9586	2·000
	(2) 0–30	6587	1·374
	30–60	7215	1·505
	60–90	8285	1·728
काली मिट्टियाँ			
	(1) 0–18 सेमी०	7536	1·572
	18–53	6975	1·455
	53–90	6785	1·415
	(2) 0–10	6050	1·262
	10–48	5875	1·225
	48–85	5425	1·132
जलोढ मिट्टियाँ			
	(1) 0–23 सेमी०	3650	0·761
	23–45	3490	0·729
	45–90	2825	0·590
	(2) 0–23	3785	0·790
	23–45	3053	0·637
	45–90	2850	0·594
	(3) 0–23	3050	0·636
	23–45	2870	0·599
	45–80	2530	0·528
	80–100	2250	0·469
भाट मिट्टियाँ			
	0–23 सेमी०	1450	0·302
	23–45	1070	0·223
	45–80	1190	0·248

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No 2, April 1973, Pages 119-121

अर्द्ध मरुस्थली भाग के कुछ पौधों के पुष्प वर्णकों का वर्णलेखी अध्ययन

श्याम सुन्दर पुरोहित तथा सुरेश चन्द्र आमेटा
राजकीय महाविद्यालय, नाथद्वारा (राजस्थान)

[प्राप्त—दिसम्बर 1, 1972]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी में कुछ नवीन पुष्प वर्णकों का उल्लेख है जिन्हें अर्द्ध मरुस्थली भाग के पौधों से पृथक करके वर्णलेखी विधि से पहचाना गया ।

Abstract

Chromatographic studies of floral pigments in some semi-arid zone plants. *By* S. S. Purohit and S. C. Ameta, Government College, Nathdwara, Rajsthan.

The present study reveals a few new floral pigments which were separated chromatographically from semi-arid zone plants.

यह उल्लेख मिलता है कि पुष्प वर्णक फ्लोरोक्रोम[1,2] हैं । अभी तक अर्धमरुस्थली पौधों के पुष्प वर्णकों का ठीक से अध्ययन नहीं हुआ अतः प्रस्तुत अध्ययन इसी की पूर्ति के उद्देश्य से किया गया ।

प्रयोगात्मक

अर्धमरुस्थली भाग के पौधों के पुष्प अंगों को एकत्र करके उन्हें 25 मिली० मेथेनॉल से निष्कर्षित किया गया । इसमें 1% HCl मिला था । पुष्प अंगों को निष्कर्षक के सम्पर्क में 15 घंटे रखने के बाद छान लिया गया । छनित को सान्द्रित करके वर्णकों को वर्णलेखन के लिये व्हाटमैन नं० 1 में बिन्दु अंकित किया गया । इसके लिये *n*-ब्यूटैनॉल, ग्लैशियल ऐसीटिक अम्ल तथा जल को 4 : 1 : 5 के अनुपात में रखा गया ।[4] पृथक्कृत पुष्प वर्णकों के वर्णलेखों को अमोनिया वाष्प/NaOH से उपचारित किया गया और विभिन्न जाति के पौधों की रंग आभाओं (शेडों) को दिन के प्रकाश में देखा गया ।[5] उपचारित तथा अनुपचारित वर्णलेखों की रंग आभाओं के *Rf* मान सारणी **1** में अंकित हैं ।

सारणी 1

कतिपय अर्द्धमरुस्थली प्रदेशों के पौधों से पृथक्कृत पुष्पवर्णकों के R_f मान तथा रंग आभायें

पौधे की जाति	R_f मान	रंग आभायें (अनुपचारित)	रंग आभायें (अमोनिया बाष्प/NaOH से उपचार के फलस्वरूप)
आइपोमिया पामेटा (पंखडियाँ)	0·39	गुलाबी	नील/गहरा हरा
आ० पामेटा (,,)	0·52	पीत	हरा/प्रीताभ हरित
यूफोर्बिया स्प्लेंडेंस (सहपत्र)	0·14	हल्का किरमिजी	बैंजनी/नीला
यू० स्प्लेंडेंस (,,)	0·35	क्रोम पीत	पीत/नारंगी लाल
यू० स्प्लेंडेंस (,,)	0·48	रंगहीन	पीत/पीत
कैटैरैंथस रोजियस (पंखडियाँ)	0·08	भूरा	हरिताभ पीत/-
कै० रोजियस (,,)	0·30	गुलाबी भूरा	हरा/पीत
कै० रोजियस (,,)	0·54	क्रोम पीत	पीत/-
कै० रोजियस (,,)	0·70	रंगहीन	पीत/-

विवेचना

यूफोर्बिया स्प्लेंडेंस में एक नवीन वर्णक पाया गया जिसका R_f-मान 0·35 है और यह सोडियम हाइड्राक्साइड से उपचारित करने पर नारंगी लाल हो जाता है। **कैटैरैंथस रोजियस** जी० डान (पर्याय विंका रोजेस)[6] में ऐंथोसायनिन नहीं पाया गया जब कि **आइपोमिया पामेटा** तथा **यूफोर्बिया प्लडेंस** में से प्रत्येक में केवल एक प्रकार का ऐंथोसायनिन मिला जो हल्के किरमिजी रंग का था। इसकी नीली आभा प्राप्त हुई (R_f 0·39) जो आ० पामेटा में तनु NaOH विलयन से उपचारित करने पर गहरी हरी हो गयी।

यू० स्प्लेंडेंस के ऐंथोसायनिन को (R_f 0·'4) अमोनिया वाष्प में रखे रहने पर बैंजनी रंग प्राप्त हुआ जो NaOH में नीला पड़ गया। कै० रोजियस के फूलों से निष्कर्षित पुष्प वर्णकों के वर्णलेख में फ्लैवोन तथा फ्लैवोनॉल की उपस्थिति पाई गई जिनके R_f मान क्रमशः 0·08 तथा 0·70 हैं। **यू० कैडूसिफोला** के हरे रूप में कोई एथोसायनिन वर्णक उपस्थित नहीं मिला किन्तु मरुस्थली प्रदेश की अन्य प्रजाति में गुलाबी रंग के ऐंथोसायनिन की सूचना है।[3,4] इन वर्णकों का रंग अमोनिया/NaOH से उपचार के पूर्व तथा पश्चात् प्रेक्षित किया गया। धब्बे का रंग नीला या बैंजनी पड़ गया जिससे फ्लैवोन की उपस्थिति सूचित होती है। फ्लैवोनॉलों की उपस्थिति की परीक्षा मूल पीत धब्बे को अमोनिया वाष्प से उपचारित करके की गई। इस उपचार के बाद भी पीला धब्बा वैसे ही रहा आया।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० डी० एन० सेन, रीडर, वनस्पति विज्ञान विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय के अत्यन्त आभारी हैं जिन्होंने अपने परामर्श से सहायता पहुँचाई ।

निर्देश

1. रामन, सी० वी० । **करेंट सांइस**, 1969, **38**, 179
2. वही । **वही**, 1969, **38**, 451
3. सेन, डी० एन० । **फोलियाजेयोबाट फाइटोटैक्सा**, 1968, **3**, **1**
4. शर्मा, के० डी० तथा सेन, डी० एन० । **करेंट सांइस**, 1969, **38**, 394

5,6 स्टाहल, ई० तथा शूर्स, पी० जे० । Thin Layer Chomatography, 1965, **पृ०** 380

7. बख्तावर, एन० । **ईरानी एल एल आर**, 1970, **4**, 27

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 2, April, 1973, Pages 123-129

सार्वीकृत स्टाइल्जे परिवर्त

सी० के० शर्मा

गणित विभाग , एस० ए० टेकनिकल इंस्टीट्यूट, विदिशा, म० प्र०

[प्राप्त—अगस्त 15, 1971]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में स्टाइल्जे परिवर्त का एक नवीन सार्वीकरण निम्नांकित रूप में प्रस्तुत करने का प्रयास किया गया है :

$$\phi(p)=\int_0^\infty \frac{1}{x} H_{r+1,t}^{m,n+1}\left[\frac{p}{x}\middle|\begin{matrix}(0,1)(a_r, e_r)\\(b_t, f_t)\end{matrix}\right] f(x)\, dx$$

इसके द्वारा कपूर परिवर्त तथा वर्मा एवं मुकर्जी के परिवर्त का भी सार्वीकरण हो जाता है। प्रतिलोमन प्रमेय की स्थापना की गई है और उदाहरण लेकर परिणाम की सम्पुष्टि की गई है।

Abstract

On generalised Stieltjes transform. *By* C. K. Sharma, Department of Mathematics, S. A. Technical Institute, Vidisha, M.P.

In the present paper an attempt has been made to give a generalization of Stieltjes transform in the form

$$\phi(p)=\int_0^\infty \frac{1}{x} H_{r+1,t}^{m,n+1}\left[\frac{p}{x}\middle|\begin{matrix}(0,1),(a_r, e_r)\\(b_t, f_t)\end{matrix}\right] f(x)\, dx$$

It also generalizes the Kapoor transform and the transform due to Varma and Mukherjee. An inversion theorem is established and the result obtained has been verified by an example.

1. स्टाइल्जे परिवर्त दो लैप्लास परिवर्तों की पुनरावृत्ति के फलस्वरूप प्राप्त होता है अर्थात् यदि

$$\phi(p)=\int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx \qquad \ldots (1\cdot1)$$

तथा
$$f(p)=\int_0^{\infty} e^{-px}\, g(x)\, dx, \qquad \ldots \quad (1{\cdot}2)$$

तो
$$\phi(p)=\int_0^{\infty} (p+x)^{-1}\, g(x)\, dx \qquad \ldots \quad (1{\cdot}3)$$

जो $g(x)$ के स्टाइल्जे परिवर्त के नाम से जाना जाता है ।

हाल ही में वर्मा[7] मुकर्जी[3] तथा कपूर[2] ने स्टाइल्जे परिवर्त का सार्वीकरण प्रस्तुत किया है । इस शोधपत्र में लेखक स्टाइल्जे परिवर्त का एक अन्य सार्वीकरण प्रस्तुत कर रहा है । यह परिणाम अधिक व्यापक होने के कारण उपर्युक्त फलों को प्रदान करता है और उसमें निहित प्राचलों के विशिष्टीकरण से प्राप्त होता है ।

अन्त में एक प्रतिलोमन-प्रमेय की स्थापना की गई है जिसकी सम्पुष्टि एक उदाहरण लेकर की गई है ।

2. सक्सेना[4] ने लैप्लास परिवर्त का सार्वीकरण निम्नलिखित रूप में किया है :

$$\phi(p)=\int_0^{\infty} H^{m,n}_{r,t}\left[p\,u\left|\begin{matrix}(a_r, e_r)\\(b_t, f_t)\end{matrix}\right.\right] f(u)\, du \qquad \ldots \quad (2{\cdot}1)$$

जहाँ $0\leqslant m\leqslant t,\ 0\leqslant n\leqslant r,\ r+t<2(m+n)$ तथा $|\arg x|<(m+n-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}t)\,\pi$.

अब हम सार्वीकृत स्टाइल्जे परिवर्त की परिभाषा देंगे । इस प्रकार यदि

$$\phi(p)=\int_0^{\infty} H^{m,n}_{r,t}\left[pu\left|\begin{matrix}(a_r, e_r)\\(b_t, f_t)\end{matrix}\right.\right] f(u)\, du$$

तथा

$$f(p)=\int_6^{\infty} e^{-pu}\, g(u)\, du$$

तो
$$\phi(p)=\int_0^{\infty} H^{m,n}_{r,t}\left[pu\left|\begin{matrix}(a_r, e_r)\\(b_t, f_t)\end{matrix}\right.\right] du\int_0^{\infty} e^{-xu}\, g(x)\, dx$$

$$=\int_0^{\infty} g(x)\, dx\int_0^{\infty} e^{-xu}\ H^{m,n}_{r,t}\left[pu\left|\begin{matrix}(a_r, e_r)\\(b_t, f_t)\end{matrix}\right.\right] du, \qquad (2{\cdot}2)$$

यदि $R(p)>0,\ r+t<2(m+n),\ |\arg p|<(m+n-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}t)\pi,\ R(\lambda+1)>0$, जहाँ $g(x)=0(x^{\lambda})$ यदि x लघु हो, $R(\lambda'+1)<0$, जहाँ

$$H^{m,n}_{r,t}\left[x\left|\begin{matrix}(a_r, e_r)\\(b_t, f_t)\end{matrix}\right.\right]=0(x^{\lambda'}) \text{ यदि } x \text{ दीर्घ हो } t\geqslant r+1,$$

समाकल $\int_T^\infty e^{-ux}|g(x)|dx$, जहाँ T दीर्घ है शून्य की ओर प्रवृत्त होता है ज्यों ज्यों $T\to\infty$, $g(x)$ x का एक शतत फलन है क्योंकि $x>0$.

(2·2) के आन्तरिक समाकल का मान निकालने पर

$$\phi(p)=\int_0^\infty \frac{1}{x}\ H_{r+1,t}^{m,n+1}\left[\begin{array}{c} p \\ x \end{array}\middle| \begin{array}{l} (0,1),\ (a_r,e_r) \\ (b_t,f_t) \end{array}\right] g(x)\ dx \tag{2·3}$$

प्राप्त होता है यदि $r+t<2(m+n)$, $|\arg p|<(m+n-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}t)$, $|\arg x|<\frac{1}{2}\pi$ तथा $R\left(\frac{b_j}{f_j}\right)>-1$ यदि $j=1, 2,\ldots, m$.

3. **(2·3) की विशिष्ट दशा :** यदि हम अपने सार्वीकृत स्टाइल्जे परिवर्त के प्राचलों का विशिष्टीकरण करें तो कतिपय सुविख्यात विशिष्ट दशायें प्राप्त होती हैं जो निम्न प्रकार हैं :

(i) $r=0=n$, $m=t=f_1=1$ तथा $b_1=0$ रखने पर (2·3) परिवर्तित होकर स्टाइल्जे परिवर्त (1·3) का रूप धारण कर लेता है।

(ii) यदि $n=0=a_1=b_1$, $r=e_1=f_1=f_2=1$, $m=2=t$, तथा $b_2=\rho-1$ प्रतिस्थापित करें तो (2·3) बदल कर

$$\phi(p)=p^{\rho-1}\sqrt{(\rho)}\int_0^\infty (p+x)^{-\rho}\ g(x)\ dx, \tag{3·1}$$

में घटित हो जाता है जो ρ कोटि का स्टाइल्जे परिवर्त कहलाता है।

(iii) $n=0=b_2$, $r=e_1=f_1=f_2=1$, $m=2=t$ $a_1=m_1-k_1+\frac{1}{2}$, $b_1=2m_1$, मानने पर सुविख्यात सार्वीकृत स्टाइल्जे परिवर्त में घटित होता है जिसे वर्मा[7] ने प्रस्तुत किया है।

(iv) जब (2·3) में $b_1=0$, $n=e_1=e_2=f_1=f_2=f_3=1$, $m=2=r$, $t=3$, $a_1=-2\mu$, $a_2=m_1-k_1+\frac{1}{2}$, $b_2=2m_1$ तथा $b_3=\sigma-\mu-\frac{1}{2}$ के तुल्य मान लिया जाता है तो मुकर्जी[8] द्वारा प्रस्तुत सार्वीकृत स्टाइल्जे परिवर्त (2·3) की विशिष्ट दशा के रूप में प्राप्त होता है।

(v) कपूर[2] द्वारा स्टाइल्जे परिवर्त का जो सार्वीकरण दिया गया है वह (2·3) में $e_j=f_j=1$ (जहाँ j का विचरण 1 से r या t तक होता है) रखकर (2·3) की विशिष्ट दशा के रूप में प्राप्त किया जा सकता है।

4. **प्रतिलोमन प्रमेय :**

यदि
$$\phi(p)=\int_0^\infty \frac{1}{x}\ H_{r+1,t}^{m,n+1}\left[\begin{array}{c} p \\ x \end{array}\middle| \begin{array}{l} (0,1),\ (a_r,e_r) \\ (b_t,f_t) \end{array}\right] g(x)\ dx \tag{4·1}$$

तो $$\tfrac{1}{2}[g(x+)+g(x-)]=\frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{\prod_{j=m+1}^{t}\surd\{(1-b_j-f_jk)\}\prod_{j=n+1}^{r}\surd\{(a_j+e_jk)\}}{\surd\{(1-k)\}\prod_{j=1}^{m}\surd\{(b_j+f_jk)\}\prod_{j=1}^{n}\surd\{(1-a_j-e_jk)\}}$$

$$\times x^{-k}G(k)\ dk, \tag{4·2}$$

जहाँ $$G(k)=\int_0^\infty p^{k-1}\phi(p)\ dp \tag{4·3}$$

बशर्ते :

(i) $y^{c-1}y(y)$ तथा $y^{k-1}\phi(y)$ का सम्बन्ध $L(0,\infty)$ से है। $[k=c+iT,\ -\infty<T<\infty]$

(ii) $g(y)$ का बद्ध विचरण बिन्दु $y=x(x>0)$ के आसपास होना है।

(iii) $g(y)=0(y^\lambda),\ R(\lambda)>0\ \ (y\to 0)$

$=0(e^{-\lambda' y}),\ R(\lambda')>0\ (y\to\infty)$, तथा

(iv) $r+t<2(m+n)+1$, $|\arg x^{-1}|<(m+n-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}t)\,\pi$ तथा $-\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m}R\left(\frac{b_j}{f_j}\right)<R(k)$ $<\frac{1}{e_j}\underset{1\leqslant j\leqslant n}{}-\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}R\left(\frac{a_j}{e_j}\right)$.

उपपत्ति :

(4·1) में दोनों ओर p^{k-1} से गुणा करने पर तथा 0 से ∞ तक p के प्रति समाकलित करने पर

$$\int_0^\infty p^{k-1}\phi(p)\,dp=\int_0^\infty p^{k-1}\,dp\int_0^\infty\frac{1}{x}H_{r+1,t}^{m,n+1}\left[\frac{p}{x}\middle|\begin{matrix}(0,1),\ (a_r,e_r)\\(b_t,f_t)\end{matrix}\right]g(x)\ dx$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{x}\,g(x)dx\int_0^\infty p^{k-1}H_{r+1,t}^{m,n+1}\left[\frac{p}{x}\middle|\begin{matrix}(0,1),\ (a_r,e_r)\\(b_t,f_r)\end{matrix}\right]dp$$

प्राप्त होता है। समाकलन के क्रम को बदलने पर तथा दाहिनी ओर के आन्तरिक समाकल का मान सुविदित फल [(5), p. 151)] की सहायता से निकालने पर हमें

$$\int_0^\infty p^{k-1}\phi(p)dp=\frac{\surd\{(1-k)\}\prod_{j=1}^{m}\surd\{(b_j+f_jk)\}\prod_{j=1}^{n}\surd\{(1-a_j-e_jk)\}}{\prod_{j=m+1}^{t}\surd\{(1-b_j-f_jk)\}\prod_{j=n+1}^{r}\surd\{(a_j+e_jk)\}}\int_0^\infty x^{k-1}g(x)dx$$

की प्राप्ति होती हैं जहाँ $r+t<2(m+n)+1$, $|\arg x^{-1}|<(m+n-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}t)\pi$

तथा $$-\min_{1\leqslant j\leqslant m} R\left(\frac{b_j}{f_j}\right)<R(K)<\frac{1}{e_j}-\max_{1\leqslant j\leqslant n} R\left(\frac{a_j}{e_j}\right).$$

(4·5) में मेलिन के प्रतिलोमन सूत्र का सम्प्रयोग करने पर (4·2) की प्राप्ति होती है, यदि ऊपर दिये गये प्रतिबन्धों में से प्रतिबन्ध (i) से (iii) तक की तुष्टि हो जाती है।

(4·4) में समाकलन के क्रम के प्रतिलोमन को वैध बताने के लिये माना कि

$$A(p)=p^{k-1}\int_0^{\epsilon_1}\frac{1}{x}\; H_{r+1,t}^{m,n+1}\left[\frac{p}{x}\left|\begin{matrix}(0,1),(a_r,e_r)\\(b_t,f_t)\end{matrix}\right.\right] g(x)\,dx)$$

तथा $$B(x)=\frac{1}{x}\,g(x)\int_0^{\epsilon_2}p^{k-1}H_{r+1,t}^{m,n+1}\left[\frac{p}{x}\left|\begin{matrix}(0,1),(a_r,e_r)\\(b_t,f_t)\end{matrix}\right.\right]dp,$$

जहाँ ϵ_1 तथा ϵ_2 लघु हैं।

अब चूंकि $$H_{r,t}^{m,n}\left[x\left|\begin{matrix}(a_r,e_r)\\(b_t,f_t)\end{matrix}\right.\right]=0(|x|^{\alpha})\text{ ज्यों ज्यों } x\to 0,$$

जहाँ $\alpha=\min_{1\leqslant j\leqslant m}\left(\frac{b_j}{f_j}\right)$, $A(p)$ तथा $B(x)$ क्रमश: $p\geqslant 0$ तथा $x\geqslant 0$ में समान रूप से तथा परम रूप से अभिसारी हों बशर्ते $R(\alpha+k)>0$ तथा $R(\mu_1-\beta)>0$.

और भी, चूंकि

$$H_{r,t}^{m,n}\left[x\left|\begin{matrix}(a_r,e_r)\\(b_t,t_t)\end{matrix}\right.\right]=0(x^{\beta}),$$

जहाँ β का कुछ निश्चित मान है ज्यों ज्यों $x\to\infty$ क्योंकि $t\geqslant r+1$ पुनरावृत्त समाकल का परम मान,

$$\int_{T_1}^{\infty}g(x)dx\int_{T_2}^{\infty}p^{k-1}\;H_{r+1,t}^{m,n+1}\left[\frac{p}{x}\left|\begin{matrix}(0,1),(a_r,e_r)\\(b_t,f_t)\end{matrix}\right.\right]dp,$$

जहाँ T_1 तथा T_2 दीर्घ हैं,

$$\int_{T_1}^{\infty}|x^{-\beta-1}\,e^{-\mu_2 t}|dx\int_{T}^{\infty}|p^{k+\beta-1}|dp$$

के स्थिर बहुक से अधिक नहीं है जो शून्य हो जाता है यदि $R(\mu_2)>0$ तथा $R(K+\beta)<0$.

अत: यदि $R(\mu_2)>0$, $R(\mu_1-\alpha)>0$, $R(k+\alpha)>0$ तथा $R(k+\beta)<0$ तो यह प्रतिलोमन वैध है।

निगमन : यदि $g(y)$ $y=x$ पर शतत हो तो

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\underset{T\to\infty}{\text{ilm}}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{\prod_{j=m+1}^{t}\sqrt{\{(1-b_j-f_jk)\}}\prod_{j=n+1}^{r}\sqrt{\{(a_j+e_jk)\}}}{\sqrt{\{(1-k)\}}\prod_{j=1}^{m}\sqrt{\{(b_j+f_jk)\}}\prod_{j=1}^{n}\sqrt{\{(1-a_j-e_jk)\}}}x^{-k}\,G(k)\,dk$$

विशिष्ट दशायें

(i) जब $r=b_1=n=0,\ m=1=t=f_1$, तो स्टाइल्जे परिवर्त (1·3) से निम्नांकित फल मिलेगा । यदि

$$\phi(p)=\int_0^\infty (p+x)^{-1}\,g(x)dx,$$

तो $$\tfrac{1}{2}[g(x+)+g(x-)]=\frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{1}{\sqrt{\{(k)\}}\sqrt{\{(1-k)\}}}\,x^{-k}\,dk\int_0^\infty p^{k-1}\,\phi(p)\,dp$$

(ii) $e_j=f_j=1$ मानने पर (जहाँ J का मान 1 से लेकर r या t तक बदलता है) हमें कपूर[2] द्वारा दिये गये फल की प्राप्ति होती है ।

5. **उदाहरण** : माना $g(x)=x^{s+1}\,y_v(2x^{1/2})$.

[(1, p. 420)] तथा H-फलन की परिभाषा का प्रयोग करने पर

$$\phi(p)=H_{r+2,\ s+3}^{m+2,\ n+1}\left[p\left|\begin{matrix}(0,1),\ (a_r,e_r),\ (s-\frac{1}{2}v+\frac{1}{2},\ 1)\\(s+\frac{1}{2}v+1,\ 1),\ (s-\frac{1}{2}v+1,\ 1),\ (b_t,f_t)s\ (s-\frac{1}{2}v+\frac{1}{2},1)\end{matrix}\right.\right]\tag{5·1}$$

जहाँ $r+t<2(m+n)+1,\ |\arg p|<(m+n-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2})\pi$

तथा $$-\tfrac{3}{4}+\max_{1\leqslant j\leqslant m}R(1-b_j/f_j)<R(1-s)<\min_{1\leqslant j\leqslant n}\left[1,\ \frac{1}{e_j}-R\ \left(\frac{a_j}{e_j}\right)\right]+\tfrac{1}{2}|R_v|+1,$$

और [(5), p. 151] का उपयोग करने पर

$$G(k)=\int_0^\infty p^{k-1}\,\phi(p)\,dp$$

$$=\int_0^\infty p^{k-1}\ H_{r+2,\ t+3}^{m+2,\ n+1}\left[p\left|\begin{matrix}(0,\ 1),(a_r,e_r),(5-\frac{1}{2}v+\frac{1}{2},\ 1)\\(s-\frac{1}{2}v+\frac{1}{2},\ 1),(s-\frac{1}{2}v+1,\ 1),(b_t,f_t),(s-\frac{1}{2}v+\frac{1}{2},1)\end{matrix}\right.\right]dp$$

$$= \frac{\sqrt{\{(k+s+\frac{1}{2}v+1)\}}\sqrt{\{(1-k)\}}\sqrt{\{(k+s-\frac{1}{2}v+1)\}} \prod_{j=1}^{m}\sqrt{\{(b_j+f_jk)\}} \prod_{j=1}^{n}\sqrt{\{1-a_j-e_jk)\}}}{\sqrt{\{(k+s-\frac{1}{2}v+\frac{1}{2})\}}\sqrt{\{(\frac{1}{2}v-k-s+\frac{1}{2})\}} \prod_{j=m+1}^{t} \sqrt{\{(1-b_j-f_jk)\}} \prod_{j=n+1}^{r} \sqrt{\{(a_j+e_jk)\}}},$$

(5·2)

जहाँ $r+t<2(m+n)+1$, $-\min_{1\leqslant j\leqslant m}\left[R\left(\frac{b_j}{f_j}\right), s\pm\frac{1}{2}v+1\right)<R(s)<\frac{1}{e_j}-\max_{1\leqslant j\leqslant n} R\left(\frac{a_j}{e_j}\right)$ तथा $|\arg p| <(m+n-\frac{1}{2}v-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2})\pi$

अब (4·6) में (5·2) का व्यवहार करने पर हमें

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\sqrt{\{(s+k+\frac{1}{2}v+1)\}}\sqrt{\{(s+k-\frac{1}{2}v+1)\}}}{\sqrt{s+k-\frac{1}{2}v+\frac{1}{2})\}}\sqrt{\{(\frac{1}{2}v-s-k+\frac{1}{2})\}}}\, x^{-1}\, dx$$

$$=x^{s+1}\, y_t(2x^{1/2}).$$

प्राप्त होगा ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक प्रो० पी० एम० गुप्त का आभारी है जिन्होंने इस पत्र की तैयारी में सहायता की ।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० । Tables of Integral transfoms, भाग II न्यूयार्क, 1954.
2. कपूर, वी० के० । प्रोसी० कैम्ब्रि० फिला० सोसा०, 1968, **64**, 407-12.
3. मुकर्जी, एस० एन० । शोध प्रबन्ध, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय 1964.
4. सक्सेना, वी० पी० । शोध प्रबन्ध, विक्रम विश्वविद्यालय 1969.
5. रत्तन सिंह । प्रोसी० नेश० एके० सांइस (भारत), 1969, **39** (A), 144-1 60.
6. टिश्मार्श, ई० सी० । Introduction to the theory of Fourier Integral, आक्सफोर्ड, 1937.
7. वर्मा० आर० एस० । प्रोसी० नेश० एके० सांइस (भारत), 1951, **20** A, 209-216.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 2, April, 1973, Pages 131-144

असंमितीय अष्टियों का युग्म

के० के० चतुर्वेदी तथा ए० एन० गोयल
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—नवम्बर 26, 1970]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में दो चरों वाली असंमितीय फूरियर अष्टियाँ प्राप्त की गई हैं। रूपनारायण[1,2] ने G तथा H फलनों के लिये असंमितीय सूत्र प्रस्तुत किये हैं जिन्हें प्रस्तुत अध्ययन की विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त किया जा सकता है।

Abstract

A pair of unsymmetrical kernels. *By* K. K. Chaturvedi and A. N. Goyal, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

In the present paper we have obtained unsymmetrical Fourier kernels in two variables. Roop Narain[1,2] has given unsymmetrical formulae for G and H-functions which can be obtained as particular cases from the present investigation.

1. फलन $k(x)$ तथा $h(x)$ फूरियर अष्टियों के युग्म बनाते हैं यदि व्युत्क्रम समीकरण

$$g(x) = \int_0^\infty k(xy)\, f(y)\, dy \tag{1.1}$$

$$f(x) = \int_0^\infty h(xy)\, g(y)\, dy \tag{1.2}$$

युगपातिक रूप से तुष्ट हों [3. p. 212]। यदि $k(x)=h(x)$ तो अष्टियाँ संमित और यदि $k(x) \neq k(x)$ तो असंमित कहलाती हैं।

2. असंमितीय फूरियर अष्टियाँ

हम निम्नांकित फलनों पर विचार करेंगे :

$$H^{(1)}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2} \frac{\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(c_j+\gamma_j(s-\frac{1}{2}))\prod_{j=1}^{p_2}\Gamma(a_j-\alpha_j(s-\frac{1}{2}))\prod_{j=1}^{m_3}\Gamma(e_j+\lambda_j(t-\frac{1}{2}))}{\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(d_j-\delta_j(s-\frac{1}{2}))\prod_{j=1}^{q_2}\Gamma(b_j+\beta_j(s-\frac{1}{2}))\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(k_j+\xi_j(t-\frac{1}{2}))}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{p_3}\Gamma(f_j-\mu_j(t-\frac{1}{2}))}{\prod_{j=1}^{q_3}\Gamma(l_j+\eta_j(t-\frac{1}{2}))} x^{-s}y^{-t}\,ds\,dt \qquad (2\cdot1)$$

तथा

$$H^{(2)}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2} \frac{\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(d_j+\delta_j(s-\frac{1}{2}))\prod_{j=1}^{q_2}\Gamma(b_j-\beta_j(s-\frac{1}{2}))\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(kj+\xi_j(t-\frac{1}{2}))}{\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(c_j-\gamma_j(s-\frac{1}{2}))\prod_{j=1}^{p_2}\Gamma(a_j+\alpha_j(s-\frac{1}{2}))\prod_{j=1}^{m_3}\Gamma(e_j-\lambda_j(t-\frac{1}{2}))}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{q_3}\Gamma(l_j-\eta_j(t-\frac{1}{2}))}{\prod_{j=1}^{p_3}\Gamma(f_j+\mu_j(t-\frac{1}{2}))} x^{-s}y^{-t}\,ds\,dt. \qquad (2\cdot2)$$

जिनमें निम्नांकित कल्पनायें की गई हैं :—

(i) $m_2-q_2=n_2-p_2>0$

$m_3-q_3=n_3-p_3>0$

(ii) $((\alpha_{p_2}))>0, \quad ((\beta_{q_2}))>0$

$((\gamma_{m_2}))>0, ((\delta_{n_2}))>0$

$((\lambda_{m_3}))>0, ((\mu_{p_3}))>0$

$((\xi_{n_3}))>0, \quad ((\eta_{q_3}))>0$

जहाँ दोहरे कोष्ठकों $((\alpha_{p_2}))$ द्वारा $\alpha_1, \alpha_2\ldots\alpha_{p_2}$ क्रम का बोध होता है।

(iii) $\frac{D}{2}=\sum_1^{m_2}\gamma_j-\sum_1^{q_2}\beta_i=\sum_1^{n_2}\delta_j-\sum_1^{p_2}\alpha_j>0$

$\frac{E}{2}=\sum_1^{m_3}\lambda_j-\sum_1^{q_3}\eta_j=\sum_1^{n_3}\xi_j-\sum_1^{p_3}\mu_j>0$

(iv) $\sum_{1}^{m_2} c_j - \sum_{1}^{q_2} b_j = \sum_{1}^{n_2} d_j - \sum_{1}^{b_2} a_j$

$$\sum_{1}^{m_3} e_j - \sum_{1}^{q_3} l_j = \sum_{1}^{n_3} k_j - \sum_{1}^{p_3} f_j \tag{2·2a}$$

(v) (2·1) तथा (2·2) में समाकल्य के सभी पोल सरल पोलों के रूप में हैं।

(vi) कंटूर L_1 तथा L_2 क्रमशः s तथा t तलों में काल्पनिक अक्षि के समान्तर हैं।

$\Gamma\{c_j+\gamma_j(s-\frac{1}{2})\}$ तथा $\Gamma(d_j+\delta_j(s-\frac{1}{2}))$ के पोल कंटूर L_1 के बाईं ओर स्थित हैं और $\Gamma(a_j-\alpha_j(s-\frac{1}{2}))$ तथा $\Gamma(b_j-\beta_j(s-\frac{1}{2}))$ के पोल उसके दाईं ओर। $\Gamma(e_j+\lambda_j(t-\frac{1}{2}))$ तथा $\Gamma(k_j+\xi_j(t-\frac{1}{2}))$ के पोल कंटूर L_2 के बाईं ओर हैं तथा $\Gamma(f_j-\mu_j(t-\frac{1}{2}))$ और $\Gamma(l_j-\eta_j(t-\frac{1}{2}))$ के पोल उसके दाईं ओर। हम (2·1) तथा (2·2) को निम्नांकित रूप में लिखेंगे :

$$H^{(1)}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2} R^{(1)}(s, t)\, x^{-s} y^{-t}\, ds\, dt \tag{2·3}$$

$$H^{(2)}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{(2\pi i)^1}\int_{L_1}\int_{L_2} R^{(2)}(s, t)\, x^{-s} y^{-t}\, ds\, dt \tag{2·4}$$

जहाँ

$$R^{(1)}(s, t) = \frac{\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(c_j+\gamma_j(s-\frac{1}{2})) \prod_{j=1}^{p_2} \Gamma(a_j-\alpha_j(s-\frac{1}{2})) \prod_{j=1}^{m_3} \Gamma(e_j+\lambda_j(t-\frac{1}{2})) \prod_{j=1}^{p_3} \Gamma(f_j-\mu_j(t-\frac{1}{2}))}{\prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(d_j-\delta_j(s-\frac{1}{2})) \prod_{j=1}^{q_2} \Gamma(b_j+\beta_j(s-\frac{1}{2})) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(k_j-\xi_j(t-\frac{1}{2})) \prod_{j=1}^{q_3} \Gamma(l_j+\eta_j(t-\frac{1}{2}))} \tag{2·5}$$

$$R^{(2)}(s,t) = \frac{\prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(d_j+\delta_j(s-\frac{1}{2})) \prod_{j=1}^{q_2} \Gamma(b_j-\beta_j(s-\frac{1}{2})) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(k_j+\xi_j(t-\frac{1}{2})) \prod_{j=1}^{q_3} \Gamma(l_j-\eta_j(t-\frac{1}{2})(}{\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(c_j-\gamma_j(s-\frac{1}{2})) \prod_{j=1}^{p_2} \Gamma(a_j+\alpha_j(s-\frac{1}{2})) \prod_{j=1}^{m_3} \Gamma(e_j-\lambda_j(t=\frac{1}{2})) \prod_{j=1}^{p_3} \Gamma(f_j-\mu_j(t-\frac{1}{2}))} \tag{2·6}$$

तो $R^{(1)}(s, t)$ $H^{(1)}(x, y)$ का तथा $R^{(2)}(s, t)$ $H^{(2)}(x, y)$ का मेलिन परिवर्त है।

फलन $k(x, y)$ तथा $h(x, y)$ को असंमितीय फूरियर अष्टियाँ होने के लिये आवश्यक है कि क्रमशः उनके मेलिन परिवर्त $K(s, t)$ तथा $\eta(s, t)$ फलनात्मक सम्बन्ध

$$K(s, t)\, \eta(1-s, 1-t) = 1 \tag{2·7}$$

की तुष्टि हों।

यह स्पष्ट है कि $R^{(1)}(s, t)$ तथा $R^{(2)}(s, t)$ इसकी तुष्टि करते हैं। $R^{(1)}(s, t)$ तथा $R^{(2)}(s, t)$ के द्वारा केवल (2·7) की ही तुष्टि व्युत्क्रमता के लिये पर्याप्त नहीं है।

$$g(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty H^{(1)}\begin{bmatrix} xu \\ yv \end{bmatrix} f(u,v)\ du\ dv \tag{2·8}$$

$$f(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty H^{(2)}\begin{bmatrix} xu \\ vy \end{bmatrix} g(u, v)\ du\ dv \tag{2·9}$$

इसके लिये और अधिक की आवश्यकता है। हम व्युत्क्रमता (2·8) तथा (2·9) को सामान्य अभिसरण विधियों द्वारा तथा माध्य वर्ग में अभिसरण का उपयोग करते हुये स्थापित करेंगे।

3. माध्य वर्ग में अभिसरण

यहाँ हम $R^{(1)}(s, t)$ तथा $R^{(2)}(s, t)$ की उपगामी प्रकृति का अनुमान लगावेंगे। माना कि $s=\sigma+il$ तथा $t=\rho+i\omega$, σ, l, ρ तथा w वास्तविक हैं जबकि $|1|$ तथा $|w|$ बड़े हैं। S के बड़े होने पर गामा फलन का उपगामी प्रसार [4, p. 278]

$$\log \Gamma(s+a) = (s+a-\tfrac{1}{2}) \log s - s + \tfrac{1}{2} \log (2\pi) + 0(s^{-1}) \tag{3·1}$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है जब कि $|\arg s| < \pi$.

अब हम $R^{(1)}(s, t)$ तथा $R^{(2)}(s, t)$ के आचरण को क्रमशः $|1|$ तथा $|w|$ के बड़े होने पर प्राप्त करेंगे। हम $-S$ वाले गामा फलनों का सम्बन्ध [4, p. 239] के द्वारा $+S$ वाले फलनों द्वारा प्रतिस्थापित करेंगे।

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi \operatorname{cosec} \pi z \tag{3·2}$$

तब (3·1) तथा (2·2a) की (i) से (iv) तक की कल्पनाओं का उपयोग करने पर

$$R^{(1)}(s, t)\ x^{-S}\ y^{-t} = |l|^{D(\sigma-1/2)}\ |\omega|^{E(\rho-1/2)} \exp\{il(D \log |l| - \log x - B) + i\omega(E \log |\omega| - \log y - c)\} \times \{\theta_1 + 0(|l|^{-1})\}\{\theta_1' + 0(|\omega|^{-1})\} \tag{3·5}$$

$$R^{(2)}(s, t)\ x^{-S}\ y^{-t} = |l|^{D(\sigma-1/2)}\ |\omega|^{E(\rho=1/2)} \exp\{il(D \log |l| - \log x - B') + i\omega(E \log |\omega| - \log y - c')\} \times \{\theta_2 + 0(|l|^{-1}\}\{\theta_2' + 0(|\omega|^{-1})\} \tag{3·6}$$

जहाँ B, C, B' तथा C' अचर हैं; Q_1, Q_1', Q_2 तथा Q_2' भी अचर हैं जिनमें से प्रत्येक का एक मान वृहत धन 1 तथा ω के लिये और दूसरा मान वृहत ऋण 1 तथा ω के लिये है।

(3·5) तथा (3·6) से यह निकलता है कि यदि $\sigma < \frac{1}{2}$, $\rho < \frac{1}{2}$, तो समाकल (2·3) तथा (2·4) समस्त x तथा y के लिए शतत रूप से अभिसारी हैं। अतः हम उनका समाकलन कर सकते हैं।

$$H_1^{(1)} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \int_0^x \int_0^y H^{(1)}[x, y] \, dx \, dy \tag{3·7}$$

$$H_1^{(2)} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \int_0^x \int_0^y H^{(2)}[x, y] \, dx \, dy \tag{3·8}$$

तो

$$H_1^{(1)} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{R^{(1)}(s,t) x^{1-s} y^{1-t}}{(1-s)(1-t)} \, ds \, dt \tag{3·9}$$

तथा

$$H_1^{(2)} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} 7 \int_{L_2} \frac{R^{(2)}(s, t) \; x^{1-s} \; y^{1-t}}{(1-s)(1-t)} \, ds \, dt \tag{3·10}$$

इसे विहित सिद्ध किया जा सकता है यदि $\sigma < \frac{1}{2}$, $\rho < \frac{1}{2}$ किन्तु निम्नांकित प्रमेयों में कंटूर L_1 तथा L_2 को क्रमशः $\sigma = \frac{1}{2}$ तथा $\rho = \frac{1}{2}$ रेखाओं की बराबरी पर लिया जावेगा। अतः यह आवश्यक है कि (3·9) तथा (3·10) $\sigma = \frac{1}{2}$ तथा $\rho = \frac{1}{2}$ के लिये भी सत्य हों। माना कि (r, θ) तथा (r', ϕ) s तथा t तलों पर बृहद वृत्तों पर बिन्दुओं के ध्रुवीय निर्देशांक हैं। तब $R^{(1)}(s, t)$ तथा $R^{(2)}(s, t)$ में से प्रत्येक का प्रमुख गुणक

$$\exp \{D(r \log r) \cos \theta + E(r' \log r') \cos \phi\} \tag{3·11}$$

होगा

चूंकि $D > 0$, $E > 0$, अतः हम कंटूर L_1 तथा L_2 के बाईं ओर को बृहद् अर्धवृत्तों द्वारा घेर सकते हैं। तब हम $H^{(1)}(x, y)$ को $\Gamma(c_j + \gamma_j(s - \frac{1}{2}))$ तथा $\Gamma(e_j + \lambda_j(t - \frac{1}{2}))$ पोलों पर $R^{(1)}(s, t)$ $x^{-s} y^{-t}$ के समाकल्य के अवशेषों के तुल्य व्यक्त कर सकते हैं। $H'(x, y)$ के लिये हम $m_1 + m_3$ कोटिक श्रेणी प्राप्त करेंगे जिनमें से प्रत्येक समग्र फलन है।

(3·5) को $1/l\omega$ द्वारा गुणा करने पर समाकल (3·9) अभिसारी होता है यदि $\sigma = \frac{1}{2}$, $\rho = \frac{1}{2}$। पुनः बृहद् वृत्त पर (3·9) के समाकल्य के लिये (3·11) प्रमुख गुणक हैं जिससे (3·9) में L_1 तथा L_2 कंटूरों का बाईं ओर वृहद अर्धवृत्तों द्वारा बन्द किया जा सकता है। (3·9) में समाकल

$$\frac{R^{(1)}(s, t) \; x^{1-s} \; y^{1-t}}{(1-s)(1-t)}$$

के अवशेषों का $\Gamma(c_j + \gamma_j(s - \frac{1}{2}))$, $\Gamma(e_j + \lambda_j(t - \frac{1}{2}))$ के पोलों पर योग होता है। यह देखा जा सकता है कि अवशेष $H^{(1)}(x, y)$ के ही पद स्वरूप हैं जो 0 से x तथा 0 से y के बीच समाकलित हैं। चूंकि $H^{(1)}(x, y)$ में कोटिक श्रेणियाँ समग्र फलन हैं और पदशः समाकलन विहित है अतः $\sigma = \frac{1}{2}$, $\rho - \frac{1}{2}$ होने पर भी (3·7) तथा (3·8) सत्य उतरते हैं।

रेखा $\sigma=\frac{1}{2}$, $\rho=\frac{1}{2}$ पर (3·5) से यह स्पष्ट है कि $R^{(1)}(s, t)x^{-s}y^{-t}$ 1 तथा ω के समस्त मानों के लिये परिबद्ध है। अतः $\rho=\frac{1}{2}$ पर $\frac{R^{(1)}(s, t)x^{-s}y^{-t}}{(1-s)(1-t)}$ का सम्बन्ध $L^{(2)}(\frac{1}{2}-i\infty, \frac{1}{2}+i\infty)$ से है और इस तरह (3·9) में समाकल माध्य वर्ग में अभिसारी हो जाता है।

इसी प्रकार $\frac{R^{(2)}(s)\ t,\ x^{-s}y^{-t}}{(1-s)(1-t)}$ भी $L^2(\frac{1}{2}-i\infty, \frac{1}{2}+i\infty)$ से सम्बन्धित है और (3·10) में समाकल माध्य वर्ग में (3·8) के $H_1^{(2)}(x, y)$ में अभिसारी हो जाता है।

प्रमेय 1

यदि

(i) $m_2-q_2=n_2-p_2>0;\ m_3-q_3=n_3-p_3>0$

(ii) $((a_{p_1}))>0,\ ((\beta_{q_2}))>0,\ ((\gamma_{m_2}))>0,\ ((\delta_{n_2}))>0.$

$(\lambda_{m_3}))>0,\ ((\mu_{p_3}))>0,\ ((\xi_{n_3}))>0,\ (\eta_{q_2}))>0.$

(iii) $\frac{D}{2}=\sum_1^{m_2}\gamma_j-\sum_1^{q_2}\beta_j=\sum_1^{n_2}\delta_j-\sum_1^{p_2}a_j>0.$

$\frac{E}{2}=\sum_1^{m_3}\lambda_j-\sum_1^{q_3}\eta_j=\sum_1^{n_3}\xi_j-\sum_1^{p_3}\mu_j>0.$

(iv) $\sum_1^{m_2}c_j-\sum_1^{q_2}b_j=\sum_1^{n_2}d_j-\sum_1^{p_2}a_j;\quad \sum_1^{m_3}e_j-\sum_1^{q_3}l_j=\sum_1^{n_3}k_j-\sum_1^{p_3}l_j.$

(v) $Re(a_{p_2}))>0,\ Re((b_{q_2}))>0,\ Re((c_{m_2}))>0,\ Re((d_{n_2}))>0,$

$Re((e_{m_3}))>0,\ Re((f_{p_3}))>0,\ Re((k_{n_3}))>0,\ Re((l_{q_3}))>0.$

(vi) $f(x, y)$ का सम्बन्ध $L^2(0, \infty)$ से हो तो सूत्र

$$\frac{d^2}{dx\ dy}\int_0^\infty\int_0^\infty H_1^{(1)}\left[\begin{matrix}xu\\yv\end{matrix}\right]f(u,v)\ \frac{du\ dv}{uv}=g^{(1)}[x, y] \quad (3\cdot12)$$

$$\frac{d^2}{dx\ dy}\int_0^\infty\int_0^\infty H_1^{(2)}\left[\begin{matrix}xu\\yv\end{matrix}\right]f(u,v)\ \frac{du\ dv}{uv}=g^{(2)}[x, y] \quad (3\cdot13)$$

द्वारा सर्वत्र $g^{(1)}(x, y)$ तथा $g^{(2)}(x, y)$ फलनों का सम्बन्ध $L^2(0, \infty)$ से प्रकट होता है।

अपरंच, व्युत्क्रम सूत्र

$$\frac{d^2}{dx\,dy}\int_0^\infty\int_0^\infty H_1^{(2)}\begin{bmatrix}xu\\vy\end{bmatrix} g^{(1)}(u,v)\frac{du\,dv}{uv}=f(x,y) \tag{3·14}$$

तथा

$$\frac{d^2}{dx\,dy}\int_0^\infty\int_0^\infty H_1^{(2)}\begin{bmatrix}xu\\vy\end{bmatrix} g^{(2)}(u,v)\frac{du\,dv}{uv}=f(x,y) \tag{3·15}$$

प्राय: सर्वत्र सत्य उतरते हैं। यही नहीं,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty [f(x,y)]^2 dx\,dy=\int_0^\infty\int_0^\infty g^{(1)}(x,y)\,g^{(2)}(x,y)\,dx\,dy \tag{3·16}$$

उपपत्ति

माना कि $\sigma=\frac{1}{2}$, $\rho=\frac{1}{2}$, जिससे कंटूर L_1 तथा L_2 सरल रेखायें हैं जो $\frac{1}{2}-i\infty$ से $\frac{1}{2}+i\infty$ तक जाती हैं। प्रतिबन्ध (v) से आश्वासन मिलता है कि $R^{(1)}(s,t)$ तथा $R^{(2)}(s,t)$ के पोल L_1 तथा L_2 की ऐसी दिशा में होंगे जैसी कि $H^{(1)}(x,y)$ तथा $H^{(2)}(x,y)$ की परिभाषा के लिये आवश्यकता होगी। हम प्रमेय A[1, p.272] की आवश्यकताओं की स्थापना करेंगे। पहली आवश्यकता है कि $R^{(1)}(\frac{1}{2}+il,\frac{1}{2}+i\omega)$ तथा $R^{(2)}(\frac{1}{2}+il,\frac{1}{2}+i\omega)$ l तथा ω के परिवद्ध फलन हों जिससे $s=\frac{1}{2}+il$ तथा $t=\frac{1}{2}+i\omega$ होने पर (2·7) की तुष्टि हो। (3·5) तथा (3·6), (2·5) तथा (2·6) से यह सुस्पष्ट है। दूसरी आवश्यकता है कि $H_1^{(1)}(x,y)$ तथा $H_1^{(2)}(x,y)$ का सम्बन्ध $R^{(1)}(s,t)$ तथा $R^{(2)}(s,t)$ से हो जो क्रमश: $H^{(1)}(x,y)$ तथा $H^{(2)}(x,y)$ के मेलिन परिवर्त हैं। इसकी तुष्टि (3·9) तथा (3·10) से होती है। तीसरी आवश्यकता यह है कि $f(x,y)$ का सम्बन्ध $L^2(0,\infty)$ से है जिसकी पूर्ति परिकल्पना से हो जाती है। चूँकि प्रमेय A[1,p. 272] के सभी प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं अत: प्रमेय ठीक है।

4. सामान्य रूप में अभिसरण

निम्नांकित प्रमेयों को सामान्य अभिसरण की विधि का उपयोग करते हुए सिद्ध किया गया है :

प्रमेय 2

यदि

(i) $m_2-q_2=n_2-p_2>0;\ m_3-q_3=n_3-p_3>0$

(ii) $((a_{p_2})), ((\beta_{q_2})), ((\gamma_{m_2})), ((\delta_{n_2})), ((\lambda_{m_3})), ((\mu_{p_3})), ((\xi_{n_3})), ((\eta_{q_3}))>0.$

(iii) $\frac{D}{2}=\sum_1^{m_2}\gamma_j-\sum_1^{q_2}\beta_j=\sum_1^{r_2}\delta_j-\sum_1^{p_2}a_j>0$

$$\frac{E}{2}=\sum_1^{m_3}\lambda_j-\sum_1^{q_3}\eta_j=\sum_1^{n_3}\xi_j-\sum_1^{p_3}\mu_j>0.$$

(iv) $\sum_1^{m_2}c_j-\sum_1^{q_2}b_j=\sum_1^{n_2}d_j-\sum_1^{p_2}a_j$; $\sum_1^{m_3}e_j-\sum_1^{q_3}l_j=\sum_1^{n_3}k_j-\sum_1^{p_3}f_j.$

(v) $Re((a_{p_2}))>\frac{((\alpha_{p_2}))}{2D}$, $Re((b_{q_2}))>\frac{((\beta_{q_2}))}{2D}$, $Re((c_{m_2}))>\frac{((\gamma_{m_2}))}{2D}$, $Re((d_{n_2}))>\frac{((\delta_{n_2}))}{2D}$

$Re((f_{p_3}))>\frac{((\mu_{p_3}))}{2E}$, $Re((e_{m_3}))>\frac{((\lambda_{m_3}))}{2E}$, $Re((k_{n_3}))\ \frac{((\xi_{n_3}))}{2E}$, $Re((l_{q_3}))>\frac{((\eta_{q_3}))}{2E}$

(vi) $x^{1-D/2D}\ y^{1-E/2E}f(x,y)$ का सम्बन्ध $L(0,\ \infty)$ से है और $f(x,y)$ $x-\xi,\ \ y=\eta$ $(\xi>0,\ \eta>0)$ के निकट परिवद्ध विचरण वाला हो तो

$$\int_0^\infty\int_0^\infty H^{(1)}\begin{bmatrix}\xi u\\ \eta v\end{bmatrix}\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty H^{(2)}\begin{bmatrix}ux\\ vy\end{bmatrix} f(x,y)\ dx\ dy\right\}du\ dv$$
$$=\tfrac{1}{4}\{f(\xi+0,\ \eta+0)+f(\xi-0,\ \eta-0)\} \tag{4·1}$$

उपपत्ति :

प्रमेय 2 को सिद्ध करने के लिए हम निम्नांकित रूपान्तरण करेंगे :

$$a=\frac{\prod_{j=1}^{m_2}(\gamma_j/D)^{\gamma_j/D}\ \prod_{j=1}^{n_2}(\delta_j/D)^{\delta_j/D}}{\prod_{j=1}^{p_2}(a_j/D)^{\alpha_j/D}\ \prod_{j=1}^{q_2}(\beta_j/D)^{\beta_j/D}}=\frac{1}{D}\left\{\frac{\prod_{j=1}^{m_2}\gamma_j{}^{\gamma_j}\ \prod_{j=1}^{n_2}\delta_j{}^{\delta_j}}{\prod_{j=1}^{p_2}a_j{}^{\alpha_j}\ \prod_{j=1}^{q_2}\beta_j{}^{\beta_j}}\right\}^{1/D}$$

$$\beta=\frac{1}{E}\left\{\frac{\prod_{j=1}^{n_3}\lambda_j{}^{\lambda_j}\ \prod_{j=1}^{n_3}\xi_j{}^{\xi_j}}{\prod_{j=1}^{p_3}\mu_j{}^{\mu_j}\ \prod_{j=1}^{q_3}\eta_j{}^{\eta_j}}\right\}^{1/E},\ \xi=\bar{\xi}^D,\ \eta=\bar{\eta}^E,\ x=X^D,\ y=Y^E$$

$$u=(U\alpha)^D,\ v=(VB)^E. \tag{4·2}$$

तो (4·1) निम्नांकित में घटित हो जाता है :

$$\int_0^\infty\int_0^\infty k^{(1)}\begin{bmatrix}\bar{\xi}U\\ \bar{\eta}V\end{bmatrix}\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty K^{(2)}\begin{bmatrix}UX\\ Vy\end{bmatrix} f^*(x,y)\ dx\ dy\right\}du\ dv$$
$$=\tfrac{1}{4}\{f^*(\bar{\xi}+0,\ \eta+0)+f^*(\bar{\xi}-0,\ \bar{\eta}-0)\} \tag{4·3}$$

जहाँ

$$k^{(1)}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = H^{(1)}[\bar{\xi}\alpha)^{D}, (\bar{\eta}\beta)^{E}](\bar{\xi}\alpha)^{(D-1)/2}\ (\bar{\eta}\beta)^{(E-1)/2}\ \alpha^{1/2}\ \beta^{1/2}\ DE \tag{4·4}$$

$$k^{(1)}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = H^{(2)}[(\bar{\xi}\alpha)^{D}, (\bar{\eta}\beta)^{E}](\bar{\xi}\alpha)^{(D-1)/2}\ (\bar{\eta}\beta)^{(E-1)/2}\ \alpha^{1/2}\ \beta^{1/2}\ DE \tag{4·5}$$

$$f^{*}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = (\bar{\xi})^{(D-1)/2}\ (\bar{\eta})^{(E-1)/2} f(\bar{\xi}^{D}, \bar{\eta}^{E}) \tag{4·6}$$

(4·1) को सिद्ध करने के लिये हम (4·3) को सिद्ध करेंगे जिसमें $K^{(1)}(x, y)$ तथा $K^{(2)}(x, y)$ अष्टियाँ हैं। (2·1) से हमें

$$k^{(1)}(X, Y) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2} \frac{\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(c_j+\gamma_j(s-\frac{1}{2}))\prod_{j=1}^{p_2}\Gamma(a_j-\alpha_j(s-\frac{1}{2}))\prod_{j=1}^{m_3}\Gamma(e_j+\lambda_j(t-\frac{1}{2}))}{\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(d_j-\delta_j(s-\frac{1}{2}))\prod_{j=1}^{q_3}\Gamma(b_j+\beta_j(s-\frac{1}{2}))\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(k_j-\xi_j(t-\frac{1}{2}))}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{p_3}\Gamma(f_j-\mu_j(t-\frac{1}{2}))}{\prod_{j=1}^{q_3}\Gamma(l_j-\eta_j(t-\frac{1}{2}))}\ (X\alpha)^{-Ds+(D-1)/2}\ (Y\beta)^{-Et+(E-1)/2}\ DE\,.\ (\alpha\beta)^{1/2}\ ds\ dt \tag{4·7}$$

प्राप्त होगा जहाँ कंटूर L_1 एक सरल रेखा है जो s तल में काल्पनिक(4·7) अक्षि के समान्तर है और $\Gamma(c_j+\gamma_j(s-\frac{1}{2}))$ तथा $\Gamma(a_j=\alpha_j(s-\frac{1}{2}))$ के पोलों को पृथक करती है। इसी तरह L_2 भी सरल रेखा है जो t तल में काल्पनिक अक्षि के समान्तर है।

हम एक और रूपान्तरण करेंगे :

$$-Ds+\frac{D-1}{2} = -S$$

$$-Et+\frac{E-1}{2} = -T \tag{4·8}$$

जिससे हमें

$$K^{(1)}(X, Y) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2} R^{(1)}(S, T)\ x^{-S}\ y^{-T}\ ds\ dT \tag{4·9}$$

प्राप्त होगा जहाँ

$$R^{(1)}(S, T) = \frac{\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(c_j+\gamma_j(s-\frac{1}{2})/D)\prod_{j=1}^{p_2}\Gamma(a_j-\alpha(s-\frac{1}{2})/D)}{\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(p_j-\delta_j(s-\frac{1}{2})/D)\prod_{j=1}^{q_2}\Gamma(b_j+\beta_j(s-\frac{1}{2})/D)}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{m_3} \Gamma(e_j+\lambda_j(T-\frac{1}{2})/E) \prod_{j=1}^{p_3} \Gamma(f_j-\mu_j(T-\frac{1}{2})/E)}{\prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(k_j-\xi_j(T-\frac{1}{2})/E) \prod_{j=1}^{q_3} \Gamma(l_j+\eta_j(T-\frac{1}{2})/E)} \alpha^{1/2-S} \beta^{1/2-T} \quad (4\cdot10)$$

इसी प्रकार हमें

$$K^{(2)}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1 L_2}\int R^{(2)}(S, T)\ x^{-S} y^{-T}\ ds\ dT \quad (4\cdot11)$$

प्राप्त होगा जहाँ

$$R^{(2)}(S, T) = \frac{\prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(d_j+\delta_j(s-\frac{1}{2})/D) \prod_{j=1}^{q_2} \Gamma(b_j-\beta_j(s-\frac{1}{2})/D) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(k_j+\xi_j(T-\frac{1}{2})/E)}{\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(c_j-\gamma_j(s-\frac{1}{2})/D) \prod_{j=1}^{p_2} \Gamma(a_j+\alpha_j(s-\frac{1}{2})/D) \prod_{j=1}^{m_3} \Gamma(e_j-\lambda_j(T-\frac{1}{2})/E)}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{q_3} \Gamma(l_j-\eta_j(T-\frac{1}{2})/E)}{\prod_{j-1}^{p_3} \Gamma(f_j+\mu_j(T-\frac{1}{2})/E)} (\alpha)^{1/2-S} (\beta)^{1/2-T} \quad (4\cdot12)$$

इस तरह $R^{(1)}(S, T)$ $K^{(1)}(X, Y)$ का और $R^{(2)}(S, T)$ $K^{(2)}(X, Y)$ का मेलिन परिवर्त है। माना कि $S=\sigma+il$ तथा $T=\rho+i\omega$. तो $R^{(1)}(S, T)$ के पोल

$$\tfrac{1}{2}-D\frac{(r+((c_{m_2})))}{((\gamma_{m_2}))}, \tfrac{1}{2}+D\frac{r+((a_{p_2}))}{((\alpha_{p_2}))}, \tfrac{1}{2}-E\frac{r+((e_{m_3}))}{((\lambda_{m_3}))}, \tfrac{1}{2}+E\frac{r+((f_{p_3}))}{((\mu_{p_3}))}$$

बिन्दुओं पर होंगे और $R^{(2)}(S, T)$ के पोल

$$\tfrac{1}{2}-D\frac{r+((d_{n_2}))}{((\delta_{n_2}))}, \tfrac{1}{2}+D\frac{r+((b_{q_2}))}{((\beta_{q_2}))}, \tfrac{1}{2}-E\frac{r+((k_{n_3}))}{((\xi_{n_3}))}, \tfrac{1}{2}+E\frac{r+((l_{q_3}))}{((\eta_{q_3}))}$$

बिन्दुओं पर जहाँ r धन पूर्णांक या शून्य के बराबर है। प्रमेय 2 के प्रतिबन्ध (v) के अनुसार यह निकलता है कि सभी a_j; f_j; $R^{(1)}(S, T)$ के पोल तथा b_j,, l_j, $R^{(2)}(S, T)$ के पोल क्रमशः $\sigma=1$ तथा $\rho=1$ के दाईं ओर स्थित हैं। प्रतिबन्ध (vi) में यदि केवल असमिका सत्य उतरे तो सभी c_j, e_j, $R^{(1)}(S, T)$ के पोल तथा d_j, k_j, $R^{(2)}(S,T)$ के पोल क्रमशः $\sigma=0$ तथा $\rho=0$ के बाईं ओर होंगे। किन्तु यदि (vi) में समिका कतिपय c_j, e_j, d_j तथा k_j के लिये पूरी उतरे तो $R^{(1)}(S, T)$ तथा $R^{(2)}(S,T)$ के पोल काल्पनिक अक्षि पर होंगे और $R^{(1)}(S, T)$ के अधिक से अधिक m_2+m_3 तथा $R^{(2)}(S, T)$ के n_2+n_3 पोल होंगे। चूँकि $R^{(1)}(S, T)$ तथा $R^{(2)}(S, T)$ की विचित्रताएं भी एकाकी

पोल हैं अतः यह अर्थ निकलता है कि $\sigma_0<0, \sigma_1>1, \rho_0<0, \rho_1>1$, ऐसा हो सकता है कि $R^{(1)}(S, T)$ तथा $R^{(2)}(S, T)$ दोनों ही $\sigma_0<\sigma<\sigma_1$ तथा $\rho_0<\rho<\rho_1$ पट्टी में नियमित हों।

यह सिद्ध करने के लिये कि $R^{(1)}(S, T)$ तथा $R^{(2)}(S, T)$ भी k' श्रेणी का होने के लिये द्वितीय आवश्यकता की भी तुष्टि करते हैं, हम वृहद धन तथा ऋण 1 तथा ω के लिए $R^{(1)}(S, T)$ तथा $R^{(2)}(S, T)$ के उपगामी आचरण की परीक्षा करेंगे।

अब (3·2) का उपयोग करते हुये $R^{(1)}(S, T)$ में आये गामा फलनों के $-s$ को $+s$ में परिवर्तित करने पर

$$R^{(1)}(S, T)=(n)^{p_2+p_3-n_2-n_3}\frac{\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(c_j+\gamma_j(s-\tfrac{1}{2})/D)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-d_j+\delta_j(s-\tfrac{1}{2})/D)}{\prod_{j=1}^{p_2}\Gamma(1-a_j+\alpha_j(s-\tfrac{1}{2})/D)\prod_{j=1}^{q_2}\Gamma(b_j+\beta_j(s-\tfrac{1}{2})/D)}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{m_3}\Gamma(e_j+\lambda_j(T-\tfrac{1}{2})/E)\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-k_j+\xi_j(T-\tfrac{1}{2}/E)\prod_{j=1}^{n_2}\sin\pi(d_j+\delta_j(s-\tfrac{1}{2})/D}{\prod_{j=1}^{p_3}\Gamma(1-f_j+\mu_j(T-\tfrac{1}{2})/E)\prod_{j=1}^{q_3}\Gamma(l_j+\eta_j(T-\tfrac{1}{2})/E)\prod_{j=1}^{p_2}\sin\pi(a_j-\alpha_j(s-\tfrac{1}{2})/D)}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{n_3}\sin\pi(k_j-\xi_j(T-\tfrac{1}{2})/E)}{\prod_{j=1}^{p_3}\sin\pi(f_j-\mu_j(T-\tfrac{1}{2})/E)}\,\alpha^{1/2-S}\,\beta^{1/2-T} \qquad (4\cdot13)$$

(4·13) में गामा फलन होने के कारण हम गुणक के साथ (3·1) का सम्प्रयोग करेंगे। प्रमेय 2 के प्रतिबन्ध ()i से (iv) तक तथा (4·2) के उपयोग द्वारा हमें वृहद $|S|$ तथा वृहद $|T|$ तथा $|\arg S|\leqslant\pi-\delta$, $|\arg T|\leqslant\pi-\mu\,\delta$, $\mu>0$ प्राप्त होते हैं और गामा फलनों वाले गुणकों के कारण $R^{(1)}(S, T)$ के उपगामी प्रसार का योगदान मात्र

$$\alpha^{S-1/2}\,\beta^{T-1/2}\exp\{(S-\tfrac{1}{2})\log S-S+(T-\tfrac{1}{2})\log T-T\}\{A_1+B_1/S+0(|S|^{-2})\}$$
$$\times\left\{A_1'+\frac{B_1'}{T}+0(|T|^{-2})\right\} \qquad (4\cdot14)$$

के रूप में होता है। जहाँ A_1, B_1, A_1' तथा B_1' S तथा T से मुक्त अचर हैं। पुनः (3·1) का उपयोग करने पर यह

$$\alpha^{S-1/2}\,\beta^{T-1/2}\,\Gamma(S)\Gamma(T)\left\{A_2+\frac{B_2}{S}+0(|S|^{-2})\right\}\left\{A_2'+\frac{B_2'}{T}+0(|T|^{-2})\right\} \qquad (4\cdot15)$$

के समतुल्य है जहाँ A_2, B_2, A_2' तथा B_2' अचर हैं ।

आगे हम ज्या गुणकों के योगदान पर विचार करेंगे । माना कि $S=\sigma+il$, $T=\rho+i\omega$, तो $|l|$ तथा $|\omega|$ के बड़ा होने देने पर यह सरलतापूर्वक देखा जावेगा कि

$$\frac{\sin \pi(d_j-\delta_j(S-\frac{1}{2})/D)}{(\cos S\pi/2)^{2\delta_j/D}} = E_1+0(e^{-|l|}) \tag{4·16}$$

जहाँ E_1 ऐसा अचर है कि

$$E_1=(2)^{2\delta_j/D-1} \exp\left\{\pi i\left(d_j-\frac{1}{2}+\frac{\delta_j}{2D}\right)\right\} \tag{4·17}$$

यदि l धन हो तथा

$$E_1=(2)^{2\delta_j/D-1} \exp\left\{-\pi i\left(d_j-\frac{1}{2}+\frac{\delta_j}{2D}\right)\right\} \tag{4·18}$$

यदि l काफी बड़ा तथा ऋण हो ।

(4·13) में अंश में n_2+n_3 ज्या गुणक हैं और हर में p_2+p_3 । इस प्रकार (4·13) में ज्या गुणकों के कारण $R^{(1)}(S, T)$ के उपगामी प्रसार में जो समग्र योगदान है वह

$$\{E_2=0(e^{-|l|})\}\{E_2'+0(e^{-|\omega|})\}\cos\frac{S\pi}{2}\cos\frac{T\pi}{2} \tag{4·19}$$

के रूप में है जहाँ E_2 तथा E_2' अचर हैं ।

इस प्रकार हमें

$$R^{(2)}(S, T)=\Gamma(S)\,\Gamma(T)\cos\frac{S\pi}{2}\cos\frac{T\pi}{2}\left\{A+\frac{B}{S}+0(|S|^{-2})\right\}\left\{A'+\frac{B'}{T}+0(|T|^{-2})\right\} \tag{4·20}$$

प्राप्त होगा जहाँ A, B, A' तथा B' अचर हैं ।

इसी प्रकार हमें

$$R^{(2)}(S, T)=\Gamma(S)\,\Gamma(T)\cos\frac{S\pi}{2}\cos\frac{T\pi}{2}\left\{D_1+\frac{E_1}{S}+0(|S|^{-2})\right\}\left\{D_1'+\frac{E_1'}{T}+0(|T|^{-2})\right\} \tag{4·21}$$

प्राप्त होगा जहाँ D_1, E_1, D_1' तथा E_1' अचर हैं ।

इससे यह पता चलता है कि $R^{(1)}(S, T)$ तथा $R^{(2)}(S, T)$ श्रेणी K' से सम्बन्धित हैं ।

प्रमेय $B[1, \text{p. } 20]$ का तीसरा प्रतिबन्ध $R^{(1)}(S, T)$ तथा $R^{(2)}(S, T)$ द्वारा तुष्ट हो जाता है यदि हम (4·10) तथा (4·12) में उनके रूपों पर दृष्टिपात करें।

चौथा प्रतिबन्ध है कि $f^*(X, Y)$ का सम्बन्ध $L(0, \infty)$ से है और यह $X=\xi$, $Y=\eta$ $(\xi, \eta>0)$ के निकट परिवद्ध विचरण का है। इसके लिये आवश्यक है कि

$$\int_0\int_0^\infty |X^{(D-1)/2}\, Y^{(E-1)/2} f(X^D, Y^E)|dx\, dy \tag{4·22}$$

का अस्तित्व हो। $X^D=x$ तथा $Y^E=y$, रखने पर यह फल निकलता है कि इन आवश्यकताओं की पूर्ति हो गई।

प्रमेय $B[1, \text{p } 20]$ की सभी आवश्यकताओं की पूर्ति हो गई अतः यह प्रमेय सत्य है।

5. $H^{(1)}(x, y)$, तथा $H^{(2)}(x, y)$ से सम्बद्ध असंतत समाकल

प्रमेय 3 : माना कि $H^{(1)}(x, y)$ तथा $H^{(2)}(x, y)$ की परिभाषा (2·1) तथा (2·2) द्वारा और $H_1^{(1)}(x,y)$, $H_1^{(2)}(x,y)$ की (3·7) तथा (3·8) द्वारा हो जाती है। यदि प्रमेय 2 के प्रतिबन्ध (i) से (vi) तक लागू हों तो

$$\int_0^\infty\int_0^\infty H^{(1)}\begin{bmatrix}\xi u\\ \eta v\end{bmatrix}H_1^{(2)}\begin{bmatrix}ux\\ vy\end{bmatrix}\frac{du\, dv}{uv}=\begin{cases}0, & \xi>x>0,\ \eta>y>0\\ \frac{1}{4} & \xi=x>0,\ \eta=y>0\\ 1 & x>\xi>0,\ y>\eta>0\end{cases} \tag{5·1}$$

उपपत्ति :

प्रमेय 2 में $f(x, y)$ की परिभाषा

$$f(x, y)=\begin{cases}1, & x<X, y<Y\\ 0 & x>X, y<Y\end{cases} \tag{5·2}$$

द्वारा की जाती है जिससे

$$\tfrac{1}{4}[f(\xi+0, \eta+0)+f(\xi-0, \eta-0)]=\begin{cases}1 & 0<\xi<X,\ 0<\eta<Y\\ \frac{1}{4} & \xi=X>0\ \ \eta=Y>0\\ 0 & \xi>X>0,\ \eta>Y>0\end{cases} \tag{5·3}$$

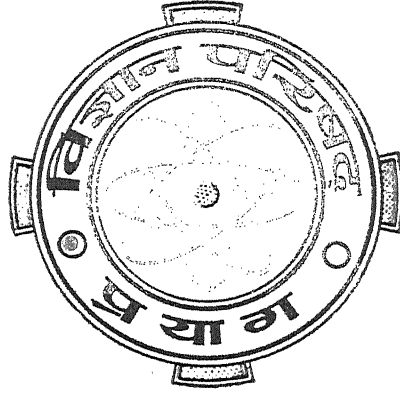
तो हमें

$$\int_0^\infty\int_0^\infty H^{(2)}\begin{bmatrix}ux\\ vy\end{bmatrix}f(x, y)\ dx\ dy=\int_0^X\int_0^Y H^{(2)}\begin{bmatrix}ux\\ vy\end{bmatrix}dx\ dy$$

$$=\frac{H_1^{(2)}\begin{bmatrix}ux\\ vy\end{bmatrix}}{uv} \tag{5·4}$$

प्राप्त होगा। अतः प्रमेय 2 से (5·1) प्राप्त होता है।

निर्देश

1. रूपनारायण। प्रोसी० श्रमे० मैथ० सोसा०, 1963, **14**, 271-277.
2. वही। ट्रांजे० श्रमे० मैथ० सोसा०, 1965, **115**, 356-369.
3. टिश्मार्श, ई० सी०। Introduction to the Theory of Fourier Integrals. श्राक्सफोर्ड यूनिवर्सिटी प्रेस, श्राक्सफोर्ड, 1937.
4. व्हिटेकर, ई० टी० तथा वाट्सन जी० एन०। A Course of Modern Analysis. कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, कैम्ब्रिज, 1935.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

भाग 16 जुलाई, 1973 संख्या 3

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 3, July 1973, Pages 131-137

जोशी प्रभाव का रूपांतरित सिद्धांत एवं कालप्रभावन तथा विराम की क्रिया

जगदीश प्रसाद

रसायन विभाग, मेरठ कॉलेज, मेरठ विश्वविद्यालय, मेरठ

[प्राप्त—दिसम्बर 4, 1972]

सारांश

विद्युत्-उत्तेजित पृष्ठ पर अधिशोषित प्रावस्था तथा बाह्य विकिरण की पारस्परिक क्रिया के आधार पर, जोशी प्रभाव, $\triangle_i$, के रूपांतरित सिद्धांत की व्याख्या का प्रयास किया गया है। क्लोरीनयुक्त ओज़ोनित्रों में $\pm\triangle_i$ पर कालप्रभावन तथा विराम की क्रिया का अध्ययन किया गया है। कालप्रभावन से $+\triangle_i$ घट जाता है तथा $-\triangle_i$ बढ़ जाता है किन्तु विराम का प्रभाव इसके बिल्कुल विपरीत होता है। यह सुझाव दिया गया है कि कालप्रभावन के दौरान एक अधिशोषित तल विकसित होता है जिसका विरामकाल में उत्क्रमण करता है या श्रांत होता है। $\triangle_i$ के लिए लेखक के रूपांतरित सिद्धांत के आधार पर इनकी व्याख्या की गई है।

Abstract

Modified theory of Joshi effect and the influence of ageing and rest. *By* Jagdish Prashad, Chemistry Department, Meerut College, Meerut University, Meerut.

The modified theory of Joshi effect, $\triangle_i$ attempts at an explanation on the basis of interaction between an absorbed phase on electrically excited surface and etxernal radiation. Influence of ageing and rest on $\pm\triangle_i$ has been studied in chlorine filled ozonizers. Ageing decreases $+\triangle_i$ and increases $-\triangle_i$; the influence of rest is just the opposite. It is suggested that an adsorbed layer develops under ageing which tends to reverse or relax during rest. These have been explained on the basis of the author's modified theory for $\triangle_i$.

जोशी प्रभाव के क्षेत्र में कार्य करने वालों का यह एक सामान्य अनुभव है कि नई भरी विसर्जन नली में $\triangle_i$ नहीं होता या अत्यंत अल्प मात्रा में होता है। कालप्रभावन की प्रक्रिया के दौरान $\triangle_i$ की उत्पत्ति होती है या उसका क्रमशः विकास होता है। विसर्जन के साथ $+\triangle_i$ घटकर या तो न्यूनतम हो

जाता है या इसका चिन्ह बदल जाता है तथापि, विपरीत प्रक्रिया का, जबकि निकाय को विरामावधि में रखकर छोड़ दिया जाता है, इसका अपेक्षाकृत कम अध्ययन हुआ है। प्रस्तुत लेख में वर्णित कार्य का मुख्य उद्देश्य विराम के दौरान $\pm\triangle_i$ में काल के साथ होने वाले परिवर्तनों का ज्ञान प्राप्त करना और तदनुसार $\triangle_i$ के लिए जोशी के सिद्धांत[1] को रूपांतरित करना है।

प्रयोगात्मक

लेखक के पूर्व-प्रकाशित लेख[2] में प्रयुक्त विधि का प्रस्तुत प्रयोग में अनुसरण किया गया है। टॉपलर निर्वात के अंतर्गत ओज़ोनित्र के वलयाकार स्थान में शोधित-शुष्क क्लोरीन गैस को प्रयोगशालीय ताप (30°C) तथा दाब (746 मिमी Hg) पर प्रविष्ट किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

प्रेक्षणों से पता लगता है कि कालप्रभावन $-\triangle_i$ का पोषक और $+\triangle_i$ का निरोधक या संदमक है जबकि परवर्ती विराम $+\triangle_i$ को बढ़ाता है और $-\triangle_i$ को घटाता है, इन दोनों की प्रकृति तथा परिणाम का निर्धारण उत्तेजक विभव द्वारा किया जाता है।

जब से जोशी प्रभाव की खोज हुई है, तब से $\pm\triangle_i$ से सम्बंधित प्रेक्षित तथ्यों की व्याख्या करने के लिए अनेक सिद्धांतों[3, 4, 5] की प्रतिस्थापना की गई है। जोशी द्वारा प्रतिपादित सिद्धांत[1] विविध प्रेक्षणों की सर्वोत्तम रीति से व्याख्या करता है; तथापि, $\triangle_i$ पर कार्य करने वाले अन्वेषकों ने समय-समय पर सिद्धांत को रूपांतरित करने की आवश्यकता अनुभव की है। $\triangle_i$ के रूपांतरित सिद्धांत के निम्नांकित अभिगृहीत उन निकायों के सक्रियण-ऊर्जा मापन के परिणामों से संपुष्ट होते हैं। जोशी प्रभाव के अध्ययन के दौरान उल्लिखित कतिपय प्रायोगिक प्रेक्षणों की सिद्धि में, जिनकी व्याख्या $\pm\triangle_i$ घटना के अन्य सिद्धांतों[3, 4, 5] के आधार पर संभव नहीं है, ये अभिगृहीत सैद्धांतिक न्यूनताओं की व्याख्या करने के लिए अनिवार्य हैं। अधिशोषित तल की प्रकृति को विस्तृत दृष्टि में रखते हुये और ऋण आयनों के निर्माण तथा स्थायित्व के प्रतिबंधों को सुनिश्चित करके, जोशी के सिद्धांत का रूपांतरण निम्नलिखित दस अभिगृहीतों में होता है :—

(1) साधारणतः जब कोई गैस या बाष्प किसी अभिक्रिया पात्र में (प्रस्तुत स्थिति में, विसर्जन स्थान में) परिबद्ध की जाती है, तो अभिक्रिया पात्र के अन्तःपृष्ठ पर गैस के अणुओं का तात्क्षणिक अधिग्रहण होता है। यह भौतिक अधिशोषण[6, 7] से अभिलक्षित होता है जो अत्यल्प अधिशोषण ऊष्मा (1—5 किलोकैलोरी) वाले वान्डर वाल बलों से युक्त होता है और जिसका गैस प्रावस्था के साथ सदैव गतिक संतुलन रहता है।

(2) जब निम्न कोटि के विद्युतीय क्षेत्र का अनुप्रयोग होता है $(V \leqslant V_m)$[2] तो संतुलन विक्षुब्ध हो जाता है और जब सक्रियण ऊर्जा (विद्युतीय) अधिशोषण ऊष्मा से बढ़ जाती है[7, 8] तो तल का तात्क्षणिक विद्युतीय विशोषण हो जाता है; फलतः पृष्ठीय कार्य-फलन, ϕ, में कमी तथा प्रकाशित उत्सर्जन में वृद्धि होती है जोकि $+\triangle_i$ की उत्पत्ति का कारण बनती है।

(3) (*a*) जब अनुप्रयुक्त विद्युतीय क्षेत्र क्रमशः बढ़ाया जाता है ($V \geqslant V_m$), तो रासायनिक शोषित तल के निर्माण के लिए सक्रियण ऊर्जा (5–20 किलोकैलोरी) उपलब्ध हो जाती है[7, 9]। जैसे-जैसे यह तल विकसित होता जाता है, कार्य-फलन बढ़ता जाता है, जिसके परिणामस्वरूप प्रकाशित उत्सर्जन घटता जाता है, अतः $+\triangle_i$ घटता जाता है। (*b*) प्रायिकता कारक p/V द्वारा निर्धारित ऋण आयन निर्माण[10] के फलस्वरूप इस अवस्था में $-\triangle_i$ की सह-उपस्थिति[2] के कारण $+\triangle_i$ में यह कमी व्यक्त हो जाती है।

(4) जब अनुप्रयुक्त विद्युतीय ऊर्जा, सक्रियण ऊर्जा तथा रासायनिक शोषण-ऊष्मा[9, 12] के जोड़ से अधिक हो जाती है, तो रासायनिक शोषित तल का विशोषण होने लगता है, तथा विद्युतीय क्षेत्र को आगे बढ़ाने पर, विशोषण बढ़ जाता है। इससे पृष्ठीय कार्य-फलन घट जाता है और परिणामतः प्रकाशित उत्सर्जन बढ़ जाता है; ऋण आयन निर्माण के लिए अनुप्रयुक्त क्षेत्र अत्यन्त अनुकूल होने के कारण[10, 11] ($V/p \geqslant 50$) $-\triangle i$ में वृद्धि हो जाती है।

(5) अत्यन्त उच्च अनुप्रयुक्त क्षेत्रों में ऋण आयन निर्माण [10, 11] घट जाता है ($V/p > 50 < 90$); जिससे $-\triangle_i$ घटता जाता है तथा $V/p \geqslant 90$ होने पर[10, 11] जैसा कि $V \gg V_m$ होने पर देखा गया है, इनका $+\triangle_i$ में उत्क्रमण हो जाता है।

(6) विद्युतीत क्षेत्र का निष्कासन करने पर, अपूर्णतः विशोषित (रासायनिक शोषित) पृष्ठ पर वान्डर वाल तल निर्मित हो जायेगा। रासायनिक शोषित तल में अधिशोषित गैस के कणों तथा वास्तविक वान्डर वाल के कणों में, पृष्ठ उत्प्रेरित अभिक्रिया के कारण, इन दोनों तलों में पारस्परिक क्रिया होती है (रिडील)[13]। इस प्रकार की पारस्परिक क्रिया के फलस्वरूप कार्य-फलन घट जाता है और इसलिए निम्न कोटि के विद्युतीय क्षेत्र के अनुप्रयोग से प्रकाशित उत्सर्जन बढ़ जाता है। अतः विसर्जन नली को विराम अवस्था में छोड़ने पर $+\triangle_i$ बढ़ जायेगा; $\pm\triangle i$ की सह-उपस्थिति के कारण, $-\triangle_i$ घट जायेगा। वान्डर वाल तल के निर्माण के लिए परमावश्यक शर्त (अर्थात् निम्न कोटि के तापों) पर ही उपर्युक्त रिडील क्रियाविधि लागू होती है।

(7) उच्च तापों पर, जबकि रासायनिक शोषित तल का विशोषण आरंभ हो चुकता है, तो सरल तुलनात्मक अधिष्ठित रासायनिक शोषित तलों में निकटवर्ती दो परमाणुओं या मूलकों में पारस्परिक क्रिया होने लगती है (लांगमुइर-हिंशेलवुड)[14, 15] जिससे कार्य-फलन घट जाता है और प्रकाशित उत्सर्जन बढ़ने से अधिक $+\triangle i$ देता है। यह क्रियाविधि केवल उच्च तापों पर ही लागू होती है।

(8) उच्च तापों तथा उच्च अनुप्रयुक्त विभवों, V, पर, जिसकी संभाव्यता का अपवर्जन नहीं किया जा सकता, आंशिक रासायनिक शोषित पृष्ठ पर, बहुल ऊर्जा अपेक्षी, सक्रियित अधिशोषण[6] कार्य-फलन को वृद्धि की ओर अग्रसारित करता है, फलतः प्रकाशित उत्सर्जन घट जाता है। उच्च तापों तथा विभवों पर $\triangle_i$ की अनुपस्थिति या अत्यन्त अल्प मात्रा में उपस्थिति से इसकी संपुष्टि होती है।

(9) पृष्ठ यौगिकों, [16, 17, 18] विशेषत: अभिक्रियाशील गैसों तथा वाष्पों के प्रकरण में, जब या तो पृष्ठ पर उच्च V पर निरंतर विद्युतीय उत्तेजन का अनुप्रयोग होता है या जब ताप अति उच्च होता है, क्योंकि इसमें काँच के सोडियम परमाणुओं तथा गैस या वाष्प के परमाणुओं की पारस्परिक क्रिया[19] का सम्बंध है और इसमें उच्च सक्रियण ऊर्जा अपेक्षित है, उनका निर्माण होता है। इसकी परिणति ϕ की वृद्धि तथा प्रकाशित उत्सर्जन में कमी में होती है। अति उच्च तापों पर और उच्च V पर निरंतर विद्युतीय उत्तेजन से $\triangle_i$ का घटना या उसका तिरोहित होना उपर्युक्त निगमन को प्रमाणित करता है।

(10) तथापि, देहली-विभव, V_m, रासायनिक शोषण के प्रादुर्भाव से अभिलक्षित होता है, जिस-पर कि वान्डर वाल तल का विशोषण अधिकतम होता है। इसी प्रकार, व्युत्क्रमण-विभव, V_i, जिस विभव पर प्रेक्षित $+\triangle_i$ का $-\triangle_i$ में परिवर्तन होता है, क्योंकि रासायनिक शोषित तल का निर्माण अधिकतम होता है, उस पर रासायनिक शोषित तल का विशोषण प्रारंभ हो जाता है। अत:, नियत द्रव्यमान अवस्थाओं में, दो संतुलन[20] प्रक्रमों के कार्य करने की संभावना प्रतीत होती है: (i) आंशिक रासायनिक शोषित तल की निर्मिति तथा विशोषण में; तथा (ii) पृष्ठ को प्रदत्त ऊर्जा (किसी भी रूप की) में परिवर्तन संतुलन अवस्थाओं को विक्षुब्ध कर देता है।

$\triangle_i$ प्रभाव की निर्मिति तथा विकास के लिए उत्तरदायी बलों की उत्क्रमणीय प्रकृति, काल-प्रभावन तथा विराम पर किये गये वर्तमान कार्य को सुस्पष्ट करता है। कालप्रभावन के कारण सक्रियण का विराम के दौरान स्पष्टत: क्रमश: प्रतिसंतुलन होता है। अत: सक्रियण तथा निष्क्रियण का उत्तरदायी कारण भी एक उत्क्रमणीय घटना होनी चाहिए अर्थात् अधिशोषित तल के निर्मायक बल उत्क्रमणीय होते हैं। अवस्थाओं की उत्क्रमणीयता, वान्डर वाल प्रकार के अधिशोषण के मुख्य लक्षणों[21] में से एक है और इस प्रकार कार्य की यह अभिमुखता इस विचार की ओर अग्रसर करती है कि रासायनिक शोषण उत्क्रमणीय सुलभ न होने से अधिशोषित तल के निर्माण में भौतिक बल एक प्रधान कार्य पूरा करते हैं।

सुझाव है कि विसर्जन प्रभावन के दौरान उत्तेजित गैस तथा ठोस काँच-भित्ति में एक अभिक्रिया होती है, जिसका विरामावधि के दौरान अंशत: उत्क्रमण होता है, जो $-\triangle_i$ को ह्रास की ओर ले जाता है। V_m से नीचे विभवों पर, जब इस प्रकार की अभिक्रिया की संभावना नहीं है, कालप्रभावन के किसी प्रभाव की अप्राप्ति से उक्त कथन पुनश्च संपुष्ट होता है।

अधिशोषित तल $\triangle_i$ का मुख्य तल होने के कारण, इसकी निर्मिति तथा स्थायित्व $\triangle i$ के परिणाम तथा चिह्न का निर्णय करता है। अतएव ऐसा अनुमान है कि विसर्जन के दौरान इस तल का निर्माणाभिमुख प्रक्रम आंशिक रूप में उत्क्रमणीय है और यह तल गैस प्रावस्था के साथ गतिक संतुलन में माना जाता है। विसर्जन की अविच्छिन्नता इस प्रकार के तल के स्थायित्व को बढ़ा देती है। इस प्रकार स्पष्ट है कि विसर्जन का अवरोध प्रतीप अभिक्रिया के पक्ष में होना चाहिए। अस्तु, यदि इस प्रकार के निकाय को पर्याप्त लंबी अवधि का विराम दिया जाये तो सीमांत-तल क्रमश: क्षीण होता जायेगा और $\pm\triangle_i$ की सह-उपस्थिति के कारण वह निकाय $-\triangle_i$ में ह्रास तथा $+\triangle i$ में वृद्धि प्रदर्शित करेगा। यदि

सीमांत-तल पर्याप्त रूप से परिवर्तित होता है तो $\triangle_i$ के चिह्न तथा परिमाण में भी परिवर्तन अपेक्षित है। इस प्रकार कालप्रभावन का भी और लंबी अवधि के विराम का भी इस तल पर प्रभाव पड़ेगा। पुनश्च, इलेक्ट्रोड की परावैद्युत प्रकृति के कारण, विद्युतीय विसर्जन के दौरान उन पर सक्रिय बिंदु विकसित हो जाते हैं। विसर्जन की अविच्छिन्नता या विद्युतीय क्षेत्र का पूर्ण बहिष्करण, जैसा कि विराम के दौरान होता है, या/तथा कोई अन्य विकृति इन सक्रिय केन्द्रों को प्रभावित करती है। ये केन्द्र एक चक्र पूरा होने पर कुछ अवशिष्ट आवेश बचा लेते हैं जो इसकी पूर्व अवस्था, विविध केन्द्रों में आवेश-घनत्व, सक्रिय बिंदुओं का विस्तार तथा इन बिंदुओं में आवेश के पोषण से प्रतिबंधित होता है। इससे एक विकृति का विकास होता है जो विराम देने पर श्रांत होती है।

लेखक के उपर्युक्त अभिगृहीत के आधार पर अब सरल व्याख्या करना संभव है। विसर्जन के बन्द होते ही, आंशिक रासायनिक शोषित पृष्ठ पर तात्क्षणिक वान्डर वाल अधिशोषण होता है। इन दो तलों में अधिशोषित गैस कणों में पृष्ठ-उत्प्रेरित अभिक्रिया होती है और इस क्रिया के मंद होने के कारण, कार्य-फलन क्रमशः घटता जाता है, जो, जैसा कि विरामावधि के दौरान प्रस्तुत परिणामों में प्रेक्षित किया गया है, प्रकाशित उत्सर्जन की वृद्धि का मार्ग प्रशस्त कर देता है। इससे विराम के दौरान $+\triangle_i$ में वृद्धि स्पष्ट है, तथा $-\triangle_i$ में ह्रास तो $\pm\triangle_i$ की सह-उपस्थिति से व्युत्पन्न परिणाम मात्र है। जब काल-प्रभावन को विभव परिसर V_m--V_i में किया जायेगा तो रासायनिक शोषित तल की निर्मिति के कारण $+\triangle_i$ घट जायेगा; इससे $-\triangle_i$ की वृद्धि को प्रेरणा मिलेगी और रासायनिक शोषण के एक बार पूर्ण हो जाने की परिस्थिति के पश्चात् तल का विशोषण होने लगता है। V_i से उच्च विभव पर काल-प्रभावन विशोषण का कारण बनता है और विभव परिसर $V_i-V_{-\Delta imax}$, में कालप्रभावन से $-\triangle_i$ में ह्रास होगा। इस परिसर के ऊपर, प्रायिकता कारक V/p से नियंत्रित ऋण आयनों की अनासक्ति के कारण $-\triangle_i$ में वृद्धि न्यूनतर परिमाण की होती है। इस प्रकार, $1-2\times V_m$ विभवों पर कालप्रभावन से, $+\triangle_i$ में प्रेक्षित ह्रास तथा $-\triangle_i$ में वृद्धि की व्याख्या संभव है। विराम के दौरान $+\triangle_i$ में वृद्धि तथा $-\triangle_i$ में ह्रास, उपर्युक्त रूपांतरित सिद्धांत में प्रस्तावित रिडील क्रियाविधि[13] का परिणाम मात्र है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक, काशी हिन्दू विश्वविद्यालय के सेवानिवृत्त प्रोफ़ेसर डा० एस०एस० जोशी का अत्यंत आभारी है, जिनका मार्ग दर्शन उसे सतत् प्राप्त होता रहा। प्रवक्ता डा० एम० वेनुगोपालन भी अमूल्य सुझावों के लिए धन्यवाद के पात्र हैं।

निर्देश

1. जोशी। **प्रेज़० ऐड०, केमि० सेक०, इंडियन साइं० कांग्रे०,** 1943; **करेंट साइंस,** 1945, **14**, 317; 1946, **15**, 281; 1947, **16**, 19.

2. जगदीश। विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका, 1972, **15(2)**, 79, पी-एच० डी० थीसिस, काशी हिन्दू वि० वि० 1961.

3. देब तथा घोष। साइंस एंड कल्चर, 1946-47, **12**, 17; जर्न० इंडियन केमि० सोसा०, 1948, **25**, 449.

4. हैरिस तथा एंजिल। जर्न० केमि० फिजि० 1951, **19**, 514; प्रोसी० फिजि० सोसा०, 1951, **64B**, 915.

5. फ्रांसिस। प्रोसी० फिजि० सोसा०, 1955, **68B**, 369.

6. रिडील, फ्रेंकेनबर्ग, कोमारेव्सकी, एमेट्ट तथा टेलर। Advances in Catalysis and Related Subjects, भाग I, 1948; भाग II, 1950, ऐकेडेमिक प्रेस इन्क०, न्यूयॉर्क.

7. स्टीफेन ब्रुनोयर। The Adsorption of Gases and Vapours, भाग I तथा II, ऑक्सफोर्ड यूनिवसिटी प्रेस, लंदन.

8. रॉबर्ट्स। Some Problems in Adsorption, 1939, कैम्ब्रिज फिजिकल ट्रैक्टस्.

9. ट्रैपनेल। Chemisorption, 1951, बटरवर्थ्स साइंस पब्लि-केशन्स, लंदन.

10. मैस्से। Negative ions 1950, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस

11. केवथ। फिजि० रिव्यू०, 1929, **33**, 603.

12. ग्रेग। The Surface Chemisty of Solids, 1951, चैपमैन एंड हॉल, लंदन.

13. रिडील। "सेवेटियर लेक्चर" 1943, केमिस्ट्री एंड इन्डस्ट्री, **62**, 335.

14. हिंशेलवुड। Kinetics of Chemical Change, 1940, ऑक्सफोर्ड यूनिवर्सिटी प्रेस, लंदन.

15. वही। "स्पियर मेमोरियल लेक्चर,' 1951, फ़ैराडे सोसाइटी

16. रोडेबुश तथा क्लिजेलहोफ़र। जर्न० अमे० केमि० सोसा०, 1933, **55**, 130.

17. केलनर। जैड० इलेक्ट्रोकेम०, 1902, **8**, 500.

18. ल्युडेकिंग । केमि० न्यूज़, 1890, **61**, 1.

19. मोरे । Properties of Glass 1948, रेनहोल्ड पब्लिकेशन्स

20. ग्लास्टन, लेडलर तथा आइरिंग । The Theory of Rate Proceses, 1941, मैकग्रॉ हिल बुक कंपनी, न्यूयॉर्क

21. ग्लास्टन । A Text Book of Physical Chemistry 1948, मेकमिलन एंड कंपनी

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No 3, July 1973, Pages 139-146

सार्वीकृत समाकल परिवर्त

फतेहसिंह तथा बी० एम० श्रीवास्तव
गणित विभाग, राजकीय इंजीनियरिंग कालेज, रीवाँ,

[प्राप्त—जुलाई 15, 1972]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में एक द्विगुण समाकल परिवर्त से परिचित कराया गया है जिसमें परिवर्त की अष्टि सार्वीकृत फाक्स का H-फलन है। इस द्विगुण रूपान्तरण में विभिन्न शोधकर्ताओं द्वारा समय समय पर प्रस्तुत कई रूपान्तर मिलेंगे। प्रस्तुत परिवर्त का प्रतिलोमन सूत्र भी दिया गया है।

Abstract

On a generalized integral transform. *By* F. Singh and B. M. Shrivastava, Department of Mathematics, Government Engineering College, Rewa.

In the present paper authors introduce a double integral transform in which the kernel of transform is the generalized Fox's H-function in the arguments. This double transformation includes many a transformation given from time to time by different authors. An inversion formula for the transform under consideration has also been established.

1. भूमिका

लैप्लास परिवर्त के नवीन सार्वीकरण के प्रयत्न में लेखक [8] को माथुर द्वारा हाल ही में पारिभाषित एक सार्वीकृत फलन प्राप्त हुआ है जिसे यदि

$$\phi(S_1, S_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty K(S_1 x, S_2 y) f(x, y) dx dy$$

में रूपान्तरण $K(S, t)$ का केन्द्र विन्दु मान लिया जाय तो इसमें नवीन परिवर्त की परिभाषा प्राप्त होती है। इसके द्वारा न केवल लैप्लास तथा हैंकेल परिवर्तों तथा उनके अधिकांश सार्वीकरणों का सार्वीकरण प्राप्त होता है प्रत्युत एक या दो चरों में उपयुक्त प्रसार की सम्भावना भी उत्पन्न करता है।

हाल ही में माथुर [8, p. 215] में दो चरों वाले फाक्स के H फलन का सार्वीकरण एक द्विगुण कंटूर समाकल की सहायता से निम्नांकित रूप में प्रस्तुत किया है :

$$H_{p,\,[t,\,t'],\,s,\,[q,q']}^{n,\,\nu_1,\,\nu_2,\,m_1,\,m_2}\left[\begin{array}{c|c} x & \{(a_p,\,e_p)\} \\ & \{(\gamma_t,\,c_t)\};\ \{(\gamma'_{t'},\,c'_{t'})\} \\ & \{(\delta_s,\,d_s)\} \\ y & \{(\beta_q,\,b_q)\};\ \{(\beta'_{q'},\,b'_{q'})\} \end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-i\infty}^{i\infty}\int_{-i\infty}^{i\infty}\phi(\xi+\eta)\psi(\xi,\,\eta)x^{\xi}\,y^{\eta}\,d\xi\,d\eta, \quad \ldots \quad (1\cdot1)$$

जहाँ

$$\phi(\xi+\eta)=\frac{\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+e_j\xi+e_j\eta)}{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-e_j\xi-e_j\eta)\prod_{j=1}^{s}\Gamma(\delta_j+d_j\xi+d_j\eta)},$$

तथा

$$\psi(\xi,\,\eta)=\frac{\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(\beta_j-b_j\xi)\prod_{j=1}^{\nu_1}\Gamma(\gamma_j+c_j\xi)\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(\beta^1{}_j-b^1{}_j\eta)\prod_{j=1}^{\nu_2}\Gamma(\gamma^1{}_j+c_j{}^1\eta)}{\prod_{j=m_1+1}^{q}\Gamma(1-\beta_j+b_j\xi)\prod_{j=\nu_1+1}^{t}\Gamma(1-\gamma_j-c_j\xi)\prod_{j=m_2+1}^{q^1}\Gamma(1-\beta^1{}_j+b^1{}_j\eta)\prod_{j=\nu_2+1}^{t^1}\Gamma(1-\gamma_j{}^1-c^1{}_j\eta)}$$

$\{(A_p,\,B_p)\}$ से p प्राचल $(A_1,\,B_1,),\ldots,\,(A_p,\,B_p)$; $0\leqslant m_1\leqslant q$, $0\leqslant m_2 q^1$, $0\leqslant\nu_1\leqslant t$, $0\leqslant\nu_2\leqslant t^1$, $0\leqslant n\leqslant p$ का बोध होता है ।

$\{(\beta_{m_1},\,b_m)\}\,\{\beta^1{}_{m_2},\,b^1{}_{m_2})\}$, $\{\gamma_{\nu_1},\,c_{\nu_1})\}$, $\{(\gamma^1{}_{\nu_2},\,c^1{}_{\nu_2})\}$ तथा $\{(a_n,\,e_n)\}$ प्राचलों की श्रेणी ऐसी है कि समाकल्य का एक भी पोल संगमी नहीं है। समाकलन के पथ आवश्यकतानुसार इस प्रकार दंतुरित कर लिये जाते हैं कि

$$(\beta j-b_j\xi)\ (j=1,\ldots,m_1)\ \text{तथा}\ \Gamma(\beta^1{}_j-b^1{}_j\eta)\ (j=1,\ldots,\,m_2),$$

के सभी पोल दाहिनी ओर तथा

$$\Gamma(\gamma_j+c_j\xi)\,j=1,\,\ldots,\,\nu_1),\ \Gamma(\gamma j^1+c_j{}^1\eta)\ (j=1,\ldots,\,\nu_2)$$

तथा $\Gamma(1-a_j+e_j\xi+e_j\eta)$ $(j=1,\ldots,\,\eta)$ के सभी पोल कल्पित अक्षि के बाईं ओर पड़ें। समाकल अभिसारी होता है यदि $\lambda>0$, $\lambda^1>0$, $|\arg x|<\frac{1}{2}\pi\lambda$ तथा $|\arg y|<\frac{1}{2}\pi\lambda^1$;

जहाँ $\lambda=\sum_{j=1}^{m_1} b_j+\sum_{j=1}^{\nu_1} c_j+\sum_{j=1}^{n} e_j - \sum_{j=m_1+1}^{q} b_j-\sum_{j=\nu_1+1}^{t_1} c_j-\sum_{j=n+1}^{p} e_j-\sum_{j=1}^{s} d_j,$

तथा $\lambda^1=\sum_{j=1}^{m_2} b_j^1+\sum_{j=1}^{\nu_2} c_j^1+\sum_{j=1}^{n} e_j-\sum_{j=m_2+1}^{q_1} b_j^1-\sum_{j=\nu_2+1}^{t_1} c_j^1-\sum_{j=n+1}^{p} e_j-\sum_{j=1}^{s} d_j,$

(1·1) को हम संकेतात्मक रूप में $H\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ द्वारा प्रदर्शित करेंगे। $H\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ का आचरण x तथा y के लघु मानों के लिये माथुर [8, p. 218] द्वारा विवेचित हुआ है।

$$H\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=O\left(|x|^{\beta}|y|^{\beta_1}\right) \text{ ज्यों-ज्यों } x\to 0 \text{ तथा } y\to 0 \tag{1·2}$$

जहाँ $\beta=min\, R\left(\frac{\beta_j}{b_j}\right)$ तथा $\beta^1=min\, R\left(\frac{\beta^1{}_h}{b^1{}_h}\right)\ (j=1,\cdots,m_1;\ h=1,\ldots,m_2)$

तथा $\sum_{j=1}^{q} b_j-\sum_{j=1}^{t} c_j-\sum_{j=1}^{p} e_j+\sum_{j=1}^{s} d_j\equiv\delta>0,$

$\sum_{j=1}^{q^1} b^1{}_j-\sum_{j=1}^{t^1} c^1{}_j-\sum_{j=1}^{p} e_j+\sum_{j=1}^{s} d_j\equiv\delta^1>0;$

तथा सम्बद्ध फलन $H\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ का आचरण माथुर [8, p 219] द्वारा $x\to\infty, y\to\infty$ के लिये विवेचित हुआ है (जो दशा $n=0$ के संगत है)

$$H_1\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=O(|x|^{\alpha}\ |y|^{\alpha^1}). \tag{1·3}$$

जहाँ $\alpha=max R\left(\frac{\gamma_j-1}{c_j}\right)$ तथा $\alpha^1=max\ R\left(\frac{\gamma^1{}_h-1}{c^1{}_h}\right)\ (j=1,\ldots,\nu_1;\ h=1,\ldots,\nu_2)$

यहाँ पर हम सार्वीकृत E-परिवर्त का परिचय समाकल समीकरण के रूप में देंगे।

$$\phi(S_1,S_2)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} H^{0,\ \nu_1,\ \nu_2,\ m_1,\ m_2}_{p,\ [t,\ t^1]\ s\ [q,\ q^1]}\left[\begin{matrix}\alpha(S_1x)^m\\ \beta(S_2y)^n\end{matrix}\left|\begin{matrix}\{(a_p,e_p)\}\\ \{(\gamma_t,c_t)\}\ \{(\gamma^1{}_{t^1},c^1{}_{t^1})\}\\ \{(\delta_s,d_s)\}\\ \{(\beta_q,b_q)\};\ \{(\beta^1{}_{q^1},b^1{}_{q^1})\}\end{matrix}\right.\right]f(x,y)\,dx\,dy \tag{1·4}$$

जहाँ $0\leqslant m_1\leqslant q$, $0\leqslant m_2\leqslant q^1$, $0\leqslant\nu_1\leqslant t$, $0\leqslant\nu_2\leqslant t$, $\lambda>0$, $\lambda^1>0$, $|\arg\alpha|<\frac{1}{2}\pi\lambda$, $|\arg\beta|<\frac{1}{2}\pi\lambda^2$, m और n धन पूर्णांक हैं तथा λ और λ^1 पहले ही परिभाषित हो चुके हैं किन्तु $n=0, f(x,y)\epsilon L(0,\ \infty)$ अपवाद है।

2. ज्ञात परिवर्तों के साथ सम्बन्ध

$p=s=0$ मान के लिये (1·4) में दो चरों वाला H-फलन दो H-फलन के गुणनफलों में टूट जाता है, अर्थात्

$$H_{t,\,q}^{m_1,\,\nu_1}\left[a(s_1x)^m \,\middle|\, \begin{matrix}\{(1-\lambda_t,\,c_t)\}\\ \{(\beta_q,\,b_q)\}\end{matrix}\right] H_{t^1,\,q^1}^{m_2,\,\nu_2}\left[\beta(s_2x)^n \,\middle|\, \begin{matrix}\{(1-\gamma^1{}_t,{}^1\,c^1{}_{t^1})\}\\ \{(\beta^1{}_{q'},\,b^1{}_{q^1})\}\end{matrix}\right]$$

और इस गुण का उपयोग निश्चित रूप से ज्ञात द्विगुण समाकल परिवर्तों के प्रदर्शन में किया गया है।

(i) (1·4) में $p=S=v_1=v_2=0,\ m_1=q,\ m_2=q^1,\ m=n=1$ रखने और $f(x,y)$ को $\rho\mu S_1S_2 f(x,y)$ द्वारा प्रतिस्थापित करने पर सिंह [14] द्वारा दिया गया फल प्राप्त होता है।

(ii) (1·4) में $m=n=\alpha=\beta=1$, $m_1=q=m+1,\ \ m_2=q^1=n+1,\ \ \nu_1=\nu_2=0,\ \ t=m,$ $t^1=n,\ c_j=c^1{}_i=b_h=b^1{}_k=1,\ \ (j=1,\ldots,m;\ \ i=1,\ldots,n;\ \ h=1,\ldots,\ m+1;\ k=1,\ldots,n+1)$ रखने, $f(x,y)$ को $S_1S_2f(x,y)$ द्वारा प्रतिस्थापित करने तथा H फलन को माइजर के G-फलन में परिणत करने पर जैन[6] द्वारा प्रस्तुत सार्वीकृत परिवर्त प्राप्त होता है।

(iii) (1·4) में $\alpha=\beta=m=n=m_1=m_2=q=q^1=b_1=b^1{}_1=1,\ \ p=S=t=t^1=\beta_1=\beta^1{}_1=0$ रखने तथा तत्समक $H_{0,\,1}^{1,\,0}\left[S_1x\,\middle|\,(0,\,1)\right]=e^{-S_1x}$ का उपयोग करने पर दो चरों वाला लैप्लास परिवर्त प्राप्त होता है, अर्थात्

$$\phi(S_1,\,S_2)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s_1x-s_2y}f(x,\,y)dxdy \tag{2·1}$$

(iv) जब हम $\alpha=\beta=\frac{1}{4},\ m=n=q=q^1=2,\ \ m_1=m_2=b_1=b_2=b^1{}_1=b^1_2=1,\ \ t=t^1=p=$ $S=0,\ \beta_1=\frac{1}{4}+\frac{\mu}{2},\ \beta_2=\frac{1}{4}-\frac{\mu}{2},\ \beta_1{}^1=\frac{1}{4}+\frac{\nu}{2},\ \beta^1_2=\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}$ रखते हैं और $f(x,y)$ को $2f(x,y)$ द्वारा प्रतिस्थापित करते हैं तो (1·4) अग्रवाल [1] द्वारा दिये गये दो चरों वाले हैंकेल परिवर्त में परिणत हो जाता है।

(v) मुकर्जी[9] द्वारा दिया गया दो चरों वाला वर्मा परिवर्त (1·4) से तब प्राप्त होता है जब हम $\alpha=\beta=m=n=t=t^1=c_1=c_1{}^1=b_1=b_2=b_1{}^1=b_2{}^1=1,\ \ p=S=\nu_1=\nu_2=0,\ m_1=m_2=q=q^1$ $=2,\ \gamma_1=\frac{1}{2}-\mu_1+\lambda_1,\ \lambda^1{}_1=\frac{1}{2}-\mu_2+\lambda_2,\ \beta_1=2\mu_1,\ \beta^1{}_1=2\mu_2=\beta_2=\beta^1{}_2=0.$ रखते हैं।

(vi) $\alpha=\beta=m=n=t=t^1=c_1=c_1{}^1=b_1=b_2=b_1{}^1=b_2{}^1=1,\ \ m_1=m_2=q=q^1=2,\ \ \nu_1=$ $\nu_2=p=S=0,\ \gamma_1=1+2\lambda_1,\ \ \lambda_1^1=1+2\lambda_2,\ \beta_1=\mu_1-\lambda_1,\ \ \beta_2=-\mu_1-\lambda_1,\ \beta_1{}^1=\mu_2-\lambda_2$

तथा $\beta_2^1 = -\mu_2 - \lambda_2$ रखने पर हमें (1·4) से दो चरों वाला माइजर परिवर्त प्राप्त होता है जिसकी विवेचना मेहरा [10] ने की है ।

एक चर वाले ज्ञात परिवर्त की विवेचना करते समय निम्नांकित गुण का उपयोग किया गया है :

$$\lim_{y\to 0} H^{p,\ \nu_1,\ 0,\ m_1,\ 1}_{p,\ [t,\ 0],\ s,\ [q,\ 1]}\left[\begin{array}{c|c} & \{(a_p\ e_p)\} \\ x & \{(\gamma_t,\ c_t)\};- \\ y & \{(\delta_s,\ d_s)\} \\ & \{(\beta_q,\ b_q)\};(0,\ 1) \end{array}\right]$$

$$= H^{m_1,\ \nu_1+p}_{t+p,\ q+s}\left[x\left|\begin{array}{l} \{a_p,\ e_p)\},\ \{(1-\gamma_t,\ c_t)\} \\ \{(\beta_q,\ b_q)\},\ \{(1-\delta_s,\ d_s)\} \end{array}\right.\right] \qquad (2{\cdot}2)$$

(vii) (1·4) में $q^1 = m_2 = 1$, $\beta_1^1 = 0$, $b_1^{1} = 1$, $p = \nu_2 = t^1 = 0$ रखने पर तथा (2·2) के उपयोग द्वारा $q+S$ को $\bar{q}$ द्वारा प्रतिस्थापित करते हुये तथा प्राचलों में उपयुक्त परिवर्तन करते हुये वर्मा का ज्ञात परिवर्त[17] प्राप्त होता है जो अपनी पारी में H-फलन को माइजर के G-फलन में परिणत किये जाने पर कपूर तथा मसूद [7] का फ़लन प्रदान करता है ।

इसी प्रकार (2·2) के गुण पर विचार करने पर तथा H-फलन पर विभिन्न प्रतिबन्ध लगाने पर माइजर [11], मैनरा [12], वर्मा [16], भिसे [5], भोंसले [4], आर्य [2] तथा ट्रिकोमी [15] द्वारा पारिभाषित परिवर्त की (1·4) विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त होता है ।

3. प्रतिलोमन सूत्र

अब हम निम्नांकित प्रमेय को स्थापित करेंगे जिससे समाकल समीकरण (1·4) का हल प्राप्त होता है यदि उसे अज्ञात फलन $f(x, y)$ के लिये उसके बिम्ब $\phi(S_1, S_2)$ के पदों में सिद्ध कर लिया जाय ।

प्रमेय : यदि $\phi(S_1, S_2)$ (1·4) में आये हुये रूप में $f(x, y)$ का सार्वीकृत H परिवर्त हो तो

$$f(x, y) = -\frac{1}{4mn\pi^2}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} x^{-\rho_1} y^{-\rho_2} \frac{\psi(\rho_1,\ \rho_2)}{Q(\rho_1,\ \rho_2)}\, d\rho_1 d\rho_2 \qquad (3{\cdot}1)$$

जहाँ

$$Q(\rho_1, \rho_2) = \frac{(a)^{(\rho_1-1)/m}\, \beta^{(\rho_2-1)} \prod_{j=1}^{m_1} \Gamma\left[\beta_j + b_j\left(\frac{1-\rho_1}{m}\right)\right] \prod_{j=1}^{\nu^1} \Gamma\left[\gamma_j + c_j\left(\frac{\rho_1-1}{m}\right)\right]}{\prod_{j=m_1+1}^{q} \Gamma\left[1-\beta_j + b_j\left(\frac{\rho_1-1}{m}\right)\right] \prod_{j=\nu_1+1}^{t} \Gamma\left[1-\gamma_j + c_j\left(\frac{1-\rho_1}{m}\right)\right.}$$

$$\prod_{j=m_2+1}^{q^1} \Gamma\left[1-\beta^1{}_j + b^1{}_j\left(\frac{\rho_2-1}{n}\right)\right]$$

$$\times \frac{\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma\left[\beta_j^1{}_j + b_j^1 \left(\frac{1-\rho_2}{n}\right)\right] \prod_{j=1}^{\nu_2} \Gamma\left[\gamma_j^1 + c^1{}_j \left(\frac{\rho_2 - 1}{n}\right)\right]}{\prod_{j=\nu_2+1}^{t^1} \Gamma\left[1 - \gamma_j^1 + c^1{}_j \left(\frac{1-\rho_2}{n}\right)\right] \prod_{j=1}^{p} \Gamma\left[\alpha_j + e_j \left(\frac{1-\rho_1}{m}\right) + e_j \left(\frac{1-\rho_2}{n}\right)\right] \prod_{j=1}^{S} \Gamma\left[\delta_j + d_j \left(\frac{\rho_1 - 1}{m} + \frac{\rho_2 - 1}{n}\right)\right]}$$

$$\psi(\rho_1\ \rho_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty S_1^{-\rho_1} S_2^{-\rho_2}\ \phi(S_1, S_2) d_{s_1} d_{s_2},$$

आवश्यक है कि

(i) $f(x, y)$ खंडशः सतत हो

(ii) द्विगुण समाकल $\int_0^\infty \int_0^\infty S_1^{-\rho_1} S_2^{-\rho_2} \phi(S_1, S_2) ds_1 ds_2$ पूर्णतया अभिसारी हो,

(iii) द्विगुण समाकल $\int_0^\infty \int_0^\infty x^{\rho_1 - 1} y^{\rho_2 - 1} f(x, y) dx dy$ भी पूर्णतया अभिसारी हो,

(iv) $\lambda > 0,\ \lambda^1 > 0,\ \delta > 0,\ \delta^1 > 0,\ |\arg \alpha| < \frac{1}{2}\pi\lambda,\ |\arg \beta| < \frac{1}{2}\pi\lambda^1$ जहाँ $\lambda, \lambda^1, n = 0$ के अतिरिक्त भलीभाँति परिभाषित हों, तथा

(v) $$-\min_{1 \leqslant j \leqslant m_1} R\left(\frac{\beta_j}{b_j}\right) R\left(\frac{1-\rho_1}{m}\right) < \max_{1 \leqslant j \leqslant v_1} R\left(\frac{\gamma_j - 1}{c_j}\right).$$

तथा $$-\min_{1 \leqslant j \leqslant m_1} R\left(\frac{\beta'_j}{b'_j}\right) < R\left(\frac{1-\rho_2}{n}\right) < \max_{1 \leqslant j \leqslant v_2} \left(\frac{\gamma^1{}_j - 1}{c^1{}_j}\right).$$

उपपत्ति—(1·4) में दोनों ओर $S_1^{-\rho_1} S_2^{-\rho_2}$ से गुणा करने पर तथा $(0, \infty)$ अन्तराल में S_1 तथा S_2 के प्रति समाकलित करने पर

$$\int_0^\infty \int_0^\infty S_1^{-\rho_1} S_2^{-\rho_2}\ \phi(S_1, S_2) ds_1 ds_2$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty S_1^{-\rho_1} S_2^{-\rho_2} \int_0^\infty \int_0^\infty H^{0,\ v_1,\ v_2\ m_1,\ m_2}_{p,\ [t,\ t^1],\ s,\ [q,\ q']} \left[\begin{matrix} \alpha(S_1 x)^m \\ \beta(S_2 y)^m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \{(a_p, e_p)\} \\ \{(\gamma_t, c_t)\};\ \{(\gamma^1{}_{t^1}, c^1{}_{t^1})\} \\ \{(\delta_s, d_s)\} \\ \{(\beta_q, b_q)\};\ \{(\beta^1{}_{q^1}, b^1{}_{q^1})\} \end{matrix} \right] f(x, y)\ dx\ dy\ ds_1\ ds_2 \quad (3.2)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) dx dy$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^\infty S_1^{-\rho_1} S_2^{-\rho_2} H^{0, v_1, v_2, m_1, m_2}_{p, [t, t^1], s, [q, q^1]} \left[\begin{matrix} a(xS_1)^m \\ \\ \beta(yS_2)^n \end{matrix} \left| \begin{matrix} \{(a_p, e_p)\} \\ \{(\gamma_t, c_t)\}; \{(\gamma^1{}_{t^1}, c^1{}_{t^1})\} \\ \{(\delta_s, d_s)\} \\ \{(\beta_q, b_q)\}; \{(\beta^1{}_{q^1}, b^1{}_{q^1})\} \end{matrix} \right. \right] ds_1 ds_2 \qquad (3\cdot3)$$

$$= \frac{1}{mn} \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\rho_1 - 1} y^{\rho_2 - 1} f(x, y) dx dy$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^\infty U^{\frac{1-\rho_1}{m} - 1} V^{\frac{1-\rho_2}{n} - 1} H^{0, v_1, v_2, m_1, m_2}_{p, [t, t^1], s, [q, q^1]} \left[\begin{matrix} au \\ \\ \beta v \end{matrix} \left| \begin{matrix} \{(a_p, e_p)\} \\ \{(\gamma_t, c_t)\}; \{(\gamma^1{}_{t^1}, c^1{}_{t^1})\} \\ \{(\delta_s, d_s)\} \\ \{(\beta_q, b_q)\}; \{(\beta^1{}_{q^1}, b^1{}_{q^1})\} \end{matrix} \right. \right] dU dV \qquad (3\cdot4)$$

पूर्व उल्लिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत समाकलन के क्रम में परिवर्तन करना द ला वैले पूसिन के प्रमेय [3, p. 504] के अनुसार वैध है। (v) में दिये हुये प्रतिबन्धों से (3·4) के अन्तिम आन्तरिक समाकल का अभिसरण दोनों ही सीमाओं पर (1·2) तथा (1·3) के आधार पर निश्चित हो जाता है। साथ ही, x, y समाकल तथा u, v समाकल परस्पर आश्रित नहीं हैं अतः अन्तिम का मान निकालने पर

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{\rho_1 - 1} y^{\rho_2 - 1} f(x, y) dx dy = \frac{mn}{Q(\rho_1, \rho_2)} \int_0^\infty \int_0^\infty S_1^{-\rho_1} S_2^{-\rho_1} \phi(S_1 S_2) ds_1 ds_2$$

की प्राप्ति होती है जो रीड के प्रमेय [13, p. 566] तथा समाकल के क्रम के उलट जाने से (3·1) प्रदान करता है।

अनुभाग 2 में दिये गये प्रतिस्थापनों से मुकर्जी [9], मेहरा [10], अग्रवाल [1], भिसे [5] भोंसले [4], तथा अन्यों के प्रतिलोमन सूत्र प्राप्त किये जा सकते हैं।

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० पी०। **गणित**, 1950, **1** (1), 17-25
2. आर्य, एस० सी०। **बुले० अन० मैथ० इटैलि०** 1959, **14**, 307-17
3. ब्रामविच, टी० जे० आई०। Theory of Infinite Series, **लन्दन, मैकमिलन** 1926

4. मोंसले, बी० आर० । **बुले० कलकत्ता मैथ० सोसा०**, 1957, **49**, 157-162

5. भिसे, बी० एम० । **जर्न० विक्रम यूनिवर्सिटी**, 1959, **3**, 57-63

6. जैन, एन० सी० । **इंडियन जर्न० इंजी० मैथ०**, 1968, **1**, 7-15

7. कपूर, वी० के० तथा मसूद, एस० । **प्रोसी० कैम्ब्रिज फिला० सोसा०**, 1968, **64**, 399-406

8. माथुर, ए० वी० । **डी० फिल० थीसिस, बिक्रम विश्वविद्यालय**, 1969

9. मुकर्जी, एस० एन० । **विज्ञान परि० अनु० पत्रिका**, 1962, **5**, 49-55

10 मेहरा, ए० एन० । **बुले० कलकत्ता मैथ० सोसा०**, 1956, **49**, 83-95

11. माइजर, सी० एस० । Proc Nederl. Akad. Weternsch **अमस्टर्डम**, 1941, **44**, 727-737

12. मैनरा, वी० पी० । **बुले० कलकत्ता मैथ० सोसा०**, 1961, **53**, 23-31

13. रीड, आई० एस० । **ड्यूक मैथ० जर्न०** 1944, **11**, 565-72

14. सिंह, आर० । **प्रोसी० नेश० एके० साइंस, इंडिया**, 1969, **39**, 149-60

15. ट्रिकोमी, एफ० । Rend. Lincei 1935 , **22**(6), 564-571

16. वर्मा, आर० एस० । **प्रोसी० नेश० एके० साइंस, इंडिया**, 1951, **20**, 209-16

17. वर्मा, सी० बी० एल० । **(प्रकाशनाधीन)**

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 3, July, 1973, Pages 147-154

लैप्लास परिवर्त तथा H-फलन सम्बन्धी समाकल समीकरण के मध्य सम्बन्ध

एम० एस० समर
गणित विभाग, रीजनल कालेज, अजमेर

[प्राप्त—अप्रैल 12, 1972]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में H-फलन सम्बन्धी एक समाकल समीकरण प्राप्त किया गया है। साथ ही प्राप्त समीकरणों तथा लैप्लास परिवर्त के मध्य सम्बन्ध स्थापित किया गया है जिससे नवीन समाकल के प्राप्त होने में सहायता मिलती है।

Abstract

A relation between Laplace transform and integral equation involving H-function. *By* M. S. Samar, Department of Mathematics, Regional College of Ajmer.

In this paper an integral equation involving the H-function in which the integration is with respect to the argument and in the solution the integration is with respect to a parameter, has been obtained. Further, a relation between Laplace transform and equations so obtained, is evaluated which helps us to obtain new integral involving the integration with respect to parameter.

1. परिभाषायें तथा प्रयुक्त परिणाम

$f(x)$ के मेलिन परिवर्त की परिभाषा निम्न प्रकार से की जाती है :

$$M\{f(x)\}=g(s)=\int_0^\infty x^{s-1} f(x)\, dx \tag{1·1}$$

तथा मेलिन का प्रतिलोमन सूत्र इस प्रकार है :

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_L x^{-s}\, g(s)\, ds. \tag{1·2}$$

${}_1(a_j, e_j)_n$ द्वारा $(a_1, e_1), (a_2, e_2), \ldots (a_n, e_n)$ प्राचलों के n युग्मों के एक सेट की अभिव्यक्ति होती है। फाक्स[5] ने H-फलन को निम्नांकित प्रकार से पारिभाषित किया है :

$$H_{k,q}^{m,n}\left[x \Big/ {}_1(a_j, e_j)_k \atop {}_1(b_j, f_j)_q\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - f_j u) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j+e_j u)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1-b_j+f_j u) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j - e_j u)} x^u \, du,$$

जहाँ रिक्त गुणनफल को इकाई के रूप में समाकलित करते हैं $0 \leqslant m \leqslant q$, $0 \leqslant n \leqslant k$, तथा सभी e तथा सभी f धन हैं, सभी a तथा b संकुल संख्यायें हैं और L बार्नीज प्रकार का उपयुक्त कंटूर है जिससे कि $\Gamma(b_j - f_j u), j=1,2, \ldots m$ के समस्त पोल कंटूर के दाईं ओर पड़ें और $\Gamma(1-a_j+e_j u)$, $j=1, 2, \ldots, n$ के बाईं ओर।

ब्राक्समा[1] ने यह सिद्ध किया है कि (1·2) के दाहिनी ओर का समाकल अभिसारी होता है जब $\phi > 0$ तथा $|\arg x| < \phi\pi/2$, जहाँ

$$\phi = \sum_{j=1}^{n} e_j - \sum_{j=n+1}^{k} e_j + \sum_{j=1}^{m} f_j - \sum_{j=m+1}^{q} f_j \tag{1·3}$$

इस शोध पत्र में सर्वत्र ϕ को (1·3) द्वारा पारिभाषित किया गया है। गुप्ता तथा श्रीमती मित्तल[9]

$$M\left\{ H_{k,q}^{m,n}\left[x \Big| {}_1(a_j, e_j)_k \atop {}_1(b_j, f_j)_q\right]\right\} = \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j+f_j s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j-e_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1-b_j-f_j s) \Pi \Gamma(a_j+e_j s)}, \tag{1·4}$$

जहाँ $0 \leqslant m \leqslant q$, $0 \leqslant n \leqslant k$, $\phi > 0$, $|\arg x| < \phi\pi/2$, $R(b_j+f_j s) > 0$ यदि $j=1, 2, \ldots, m$ तथा $R(1-a_j-e_j s) > 0$ यदि $j=1, 2, \ldots, n$

गुप्ता[7]

$$t^{-\rho} H_{k,q}^{m,n}\left[z t^{\eta} \Big/ {}_1(a_j, e_j)_k \atop {}_1(b_j, f_j)_q\right] \doteq p^{\rho} H_{k+1,q}^{m,n+1}\left[z p^{-\eta} \Big/ {}_1(\rho, \eta), (a_j, e_j)_k \atop {}_1(b_j, f_j)_q\right], \tag{1·5}$$

यदि $\eta > 0$, $R(p) > 0$, $R(1-p+\eta \; b_j/f_j) > 0$ $j=1$ से m तक के लिये। तथा $|\arg zp^{-\eta}| \leqslant \phi\pi/2$, $R(\mu+\frac{3}{2}) < 0$, जहाँ

$$\mu=\tfrac{1}{2}(k-q)+\sum_{1}^{q} b_j-\sum_{1}^{k} a_j$$

गुप्ता तथा जैन[8]

$$\int_0^\infty x^{\eta-1}\, H_{p,q}^{m,n}\left[\frac{z}{x^{-\sigma}}\Big/\begin{matrix}{}_1(a_j,\alpha_j)_p\\ {}_1(b_j,\beta_j)_q\end{matrix}\right] H_{r,l}^{k,f}\left[sx\Big/\begin{matrix}{}_1(c_j,\gamma_j)_r\\ {}_1(d_j,\delta_j)_l\end{matrix}\right]dx.$$

$$=s^{-\eta}\, H_{p+l,\,q+r}^{m+f,\,n+k}\left[\frac{z}{s^{\sigma}}\Big/\begin{matrix}{}_1(a_j,\alpha_j)_n,\ {}_1(1-d_j-\eta\delta_j,\sigma\delta_j)_l,{}_{n+1}(a_j,\alpha_j)_p\\ {}_1(b_j,\beta_j)_m,\ (1-e_j-\eta\gamma_j,\sigma\gamma_j\}_{1},{}_{m+1}(b_j,\beta_j)_q\end{matrix}\right], \tag{1·6}$$

यदि $R[\eta+\sigma b_j/\beta_j+d_i/\delta_i]>0$ जहाँ $j=1$ से m तथा $i=1$ से k,

$$R\left[\eta+\frac{c_j-1}{r_j}+\sigma\,\frac{a_i-1}{\alpha_i}\right]<0$$

जहाँ $j=1$ से f, $i=1$ से n, $\sigma>0$, $A>0$ $\lambda'>0$, $|\arg z|<A\pi/2$, $|\arg s|<\frac{\lambda'\pi}{2}$,

$$\lambda'=\sum_{1}^{k}\delta_j-\sum_{k+1}^{l}\delta_j+\sum_{1}^{f}\gamma_j-\sum_{f+1}^{r}\gamma_j\quad A=\sum_{1}^{n}\alpha_j-\sum_{n+1}^{p}\alpha_j+\sum_{1}^{m}\beta_j-\sum_{m+1}^{q}\beta_j$$

नायर[10]

$$M\left\{x^{\sigma}/(1+x)^{\rho}\ H_{k+1,q}^{m,n+1}\left[yx^{\lambda}/(1+x)^{\lambda}\left|\begin{matrix}(1-\rho,\lambda),\ {}_1(a_j,e_j)_k\\ {}_1(b_j\cdot f_j)_q\end{matrix}\right.\right]\right\}.$$

$$=\Gamma(\rho-s-\sigma)\ H_{k+1,q}^{m,n+1}\left[y\left|\begin{matrix}(1-s-\sigma,\lambda),\ {}_1(a_j,e_j)_k\\ {}_1(b_j,f_j)_q\end{matrix}\right.\right] \tag{1·7}$$

यदि $\lambda>0$, $R(\rho)>R(s+\sigma)>0$, $R(s+\sigma+\lambda b_j/f_j)>0$, जहाँ $j=1$ से m, $\phi+\lambda>0$, $|\arg y|<\pi/2(\phi+\lambda)$.

2. समाकल समीकरण

समाकल समीकरण

$$g(x)=\Gamma(\rho-\sigma-ix)\int_0^\infty H_{k+1,q}^{m,n+1}\left[y\Big/\begin{matrix}(1-\sigma-ix,\lambda),\ {}_1(a_j,e_j)_k\\ {}_1(b_j,f_j)_q\end{matrix}\right]f(y)\,dy \tag{2·1}$$

का हल

$$f(x)=\frac{\lambda e^{-\pi i}}{2\pi ix}\int\frac{g(-iu)e^{-u\pi i}}{\Gamma(\rho-\sigma-u)}\,H_{q,\,k+1}^{k-n+1,q-m}\left[\frac{e^{-\lambda\pi i}}{x}\Big/\begin{matrix}{}_q(b_j,f_j)_1\\ (-\sigma-u,\lambda),\ {}_k(a_j,e_j)\end{matrix}\right]du, \tag{2·2}$$

है यदि $\lambda>0$, $\phi+\lambda>0$, $|\arg y|<\frac{1}{2}\pi(\phi+\lambda)$ तथा समाकलन का पथ $c-i\infty$ से $c+i\infty$ लेकर

अवस्थित हो कि पथ $R(\rho)>R(s+\sigma)>0$, $R(\rho-\lambda s)>0$, $R(b_j+f_j s)>0$, $R(s+\sigma+\lambda b_j/f_j)>0$, $R(1-ai-e_i s)>0$, का प्रत्येक बिन्दु, जिससे $j=1, 2, \ldots, m$ तथा $i=1, 2, \ldots, n$ और (2·2) में दाईं ओर समाकलन के पथ के प्रत्येक बिन्दु के लिये $R(\lambda s-\sigma-u)>0$.

उपपत्ति : (2·1) में x के स्थान पर $-i\mu$ रखने पर, दोनों ओर $x^{-b/2\pi i}$ से गुणा करने पर तथा $c+i\infty$ से $c-i\infty$ तक u के प्रति समाकलित करने पर

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L g(-iu)x^{-u}\,du=\int_L x^{-n}\Gamma(\rho-\sigma-u)\int_0^\infty H_{k+1,q}^{m,n+1}\left[y\,\Big/\,\begin{matrix}(1-\sigma-u,\ \lambda),\ {}_1(a_j,\ e_j)_k\\ {}_1(b_j,\ f_j)_q\end{matrix}\right]f(y)\,dy$$

समाकलन के क्रम को बदलने पर

$$=\int_0^\infty f(y)\,dy\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_L x^{-u}\,\Gamma(\rho-\sigma-u)\,H_{k+1,q}^{m,n+1}\left[y\,\Big/\,\begin{matrix}(1-\sigma-u,\ \lambda),\ {}_1(a_j,\ e_j)_k\\ {}_1(b_j,\ f_j)\end{matrix}\right]du$$

$$=\frac{x^\sigma}{(1+x)^\rho}\int_0^\infty H_{k+1,q}^{m,n+1}\left[\frac{yx^\lambda}{(1+x)^\lambda}\,\Big/\,\begin{matrix}(1-\rho,\ \lambda),\ {}_1(a_j,\ e_j)_k\\ {}_1(b_j,f_j)_q\end{matrix}\right]f(y)\,dy$$

इस प्रकार दिया हुआ समाकल समीकरण निम्नांकित रूप धारण कर लेता है :

$$\int_0^\infty f(y)\ H_{k+1,q}^{m,n+1}\left[\frac{yx^\lambda}{(1+x)^\lambda}\,\Big|\,\begin{matrix}(1-\rho,\ \lambda),\ {}_1(a_j.\ e_j)_k\\ {}_1(b_j,f_j)_q\end{matrix}\right]f(y)\,dy=\bar{g}(t)$$

जहाँ $\bar{g}(t)=\dfrac{(1+x)^\rho}{x^\sigma}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int x^{-u}\,g(-iu)\,du$ तथा $t=\dfrac{x^\lambda}{(1+x)^\lambda}$.

(2·2) को हल करने के लिये टिश्मार्श की विधि [12, p. 316] का उपयोग किया जा सकता है।

यदि $$g(x)=\int_0^\infty k(ry)\,f(y)\,dy,$$

तो $$(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{G(1-s)}{h(1-s)}\,x^{-s}\,ds \tag{2·3}$$

जहाँ $K(s)=M\{k(x)\}$ तथा $G(s)=M\{g(x)\}$

समाकलन के चर में परिवर्तन ला करके (2·3) को निम्नांकित रूप में लिखा जा सकता है :

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{G(-s)}{K(-s)}\,x^{-s-1}\,ds \tag{2·4}$$

समीकरण (2·2) से

$$G(s)=\int_{t=0}^{s}t^{s-1}\,g(t)\,dt$$

$$= \int_{t=0}^{\infty} t^{s-1}\, dt\, \frac{(1+x)^{\rho}}{x^{\sigma} 2\pi i} \int x^{-u}\, g(-iu)\, du$$

$$= \lambda \int_{x=0}^{-1} \frac{(1+x)^{-\lambda s-1}}{x^{-\lambda s-1}} \frac{(1+x)^{\rho}}{2\pi i\, x^{\sigma+2}} \int_L x^{-u}\, g(-iu)\, du\, dx$$

समाकलन के क्रम को बदलने पर

$$= \frac{\lambda}{2\pi i} \int g(-iu)(-1)^{\lambda s-u-\sigma} \frac{\Gamma(\rho-\lambda s)\Gamma(\lambda s-u-\sigma)}{\Gamma(\rho-\sigma-u)}\, du$$

यदि $R(\rho-\lambda s)>0,\ R(\lambda s-u-\sigma)>0$

$$K(s) = M\left\{ H_{k+1,q}^{m,n+1}\left[x \,\middle|\, \begin{matrix}(1-\rho_1\,\lambda),\ {}_1(a_j, e_j)_k \\ {}_1(b_j, f_j)_q\end{matrix}\right]\right\}$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j+f_j s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j-e_j s)\Gamma((\rho-\lambda s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1-b_j-f_j s) \prod_{j=n+1}^{k} \Gamma(a_j+e_j s)}$$

अतः (2·4) से

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int x^{-s-1} \frac{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1-b_j+f_j s) \prod_{j=n+1}^{k} \Gamma(a_j-e_j s)}{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j-f_j s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j+e_j s)\Gamma(\rho+\lambda s)}$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \int g(-iu)(-1)^{-\lambda s-u-\sigma} \frac{\Gamma(\rho+\lambda s)\Gamma(-\lambda s-u-\sigma}{\Gamma(\rho-\sigma-u)}\, du\, ds$$

की प्राप्ति होगी।

अब समाकलन के क्रम बदलने तथा (1·2) का उपयोग करने पर वांछित हल की प्राप्ति होगी।

समाकलन के क्रम में परिवर्तन लाना वैध है क्योंकि दिये हुये प्रतिबन्ध के अन्तर्गत द्विगुण समाकल पूर्णतया अभिसारी है।

3· समाकल समीकरण (2·1), (2·2) तथा लैप्लास परिवर्त में सम्बन्ध

यदि
$$\phi(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} f(x)\, dx \tag{3·11}$$

और
$$g(x) = \int_0^{\infty} \Gamma(\rho-\sigma-ix)\, H_{k+1,q}^{m,n+1}\left[y \,\middle/\, \begin{matrix}(1-\sigma-ix,\ \lambda),\ {}_1(a_j, e_j)_k \\ {}_1(b_j, f_j)_q\end{matrix}\right] f(y)\, dy \tag{3·12}$$

तो
$$\phi(p)=\frac{\lambda e^{(\lambda-\sigma)\pi i}}{p2\pi i}\int \frac{e^{-u\pi i}\, g(-iu)}{\Gamma(\rho-\sigma-u)}$$
$$\times H^{q-m,k-n+2}_{k+2,\,q}\left[\frac{e^{\lambda\pi i}}{p}\Big/ \begin{matrix}(0,\,1),\,(\sigma+u,\,\lambda),\,{}_k(-a_j,\,e_j)_1\\ {}_q(-b_j,f_j)_1\end{matrix}\right] \quad (3\cdot 13)$$

यदि $R(p)>0,\ R\left(1+\frac{1-\sigma-u}{\lambda}\right)>0,\ R(1-b_j/f_j)>0$ जिससे $h=1, 2, \ldots, p-n,\ \eta\geqslant 0,\ |\arg p^{-1}e^{\lambda\pi i}|\leqslant\eta\,\pi/2,\ R(\mu+3/2)<0$

जहाँ η, μ के द्वारा निम्नांकित समीकरण तथा (2·1) और (2·2) में दिये गये प्रतिबन्धों का बोध होता है :

$$\eta=\sum_{k}^{k-n} e_j-\sum_{k-n-1}^{1} e_j+\sum_{q}^{q-m} f_j-\sum_{q-m-1}^{1} f_j \quad \text{तथा } \tfrac{1}{2}(p+q-1)+\sum_{1}^{k} a_j-\sum_{1}^{q} b_j$$

उपपत्ति : (3·11) में $f(x)$ का मान (2·2) से रखने पर

$$\phi(p)=\int_0^\infty e^{-px}\frac{\lambda e^{-\sigma\pi i}}{2\pi i x}\int \frac{g(-iu)e^{-u\pi i}}{\Gamma(\rho-\sigma-u)}\times H^{k-n+1,q-m}_{q,k+1}\left[\frac{e^{-\lambda\pi i}}{x}\Big/ \begin{matrix}{}_q(b_j,f_j)_1\\ (-\sigma-u,\,\lambda),\,{}_k(a_j,\,e_j)_1\end{matrix}\right]$$

अब समाकलन का क्रम परिवर्तित कर दिया जाता है जो द ला वैली पूसिन के प्रमेय [(2) p. 504] के फलस्वरूप वैध है और (1·5) की सहायता से x समाकल का मान ज्ञात करके (3·1) प्राप्त किया जाता है।

4. विशिष्ट दशा तथा (3·1) का सम्प्रयोग

यदि $f(x)=x^{-1/2}\,e^{-\alpha/x}$ तो एर्डेल्यी [3, pp. 146(7)] की सहायता से (3·11) निम्न रूप धारण करेगा :

$$\phi(p)=\pi^{1/2}\,p^{-1/2}\,e^{-2\sqrt{(\alpha p)}} \quad (4\cdot 1)$$

(3·12) में x का मान रखने पर तथा $\rho=\sigma=m=q=\lambda=1,\ p=n=bq=0$ मानने पर समाकल का मान एर्डेल्यी [4 pp. 234(13)] का उपयोग करते हुये ज्ञात करने पर

$$g(x)=\Gamma(ix+\tfrac{1}{2})2^{1/2+ix}\,e^{\alpha/2}\,D_{-1-2ix}\,[\sqrt{(2\alpha)}]$$

अब एर्डेल्यी [2, pp. 126(10)] की सहायता से (3·13) में $g(x)$ का मान रख करके समाकल का मान ज्ञात करने पर $\phi(p)$ का वही मान प्राप्त होता है जो ऊपर प्राप्त हो चुका है ।

यदि
$$f(x)=H^{\alpha,\beta}_{\gamma,\delta}\left[zx^{\psi}\Big/\begin{matrix}{}_1(a_j,\,\beta_j)_\gamma\\ {}_1(\gamma_j,\,\delta_j)_\delta\end{matrix}\right] \quad (4\cdot 2)$$

तो
$$\phi(p)=p^{-1}H^{\alpha,\beta+1}_{\gamma+1,\delta}\left[zp^{-\psi}\Big|\begin{matrix}(0,\,\psi),\,{}_1(a_j,\,\beta_j)_\gamma\\ {}_1(\gamma_j,\,\delta_j)_\delta\end{matrix}\right] \quad (4\cdot 2)$$

तथा (1·6) और (3·12) का उपयोग करने पर

$$g(x)=\Gamma(\rho-\sigma-ix)$$
$$H^{\alpha+n+1,\beta+m}_{\gamma+q,\delta+k+1}\left[z\Big/\begin{matrix}{}_1(a_j,\beta_j)_\beta,\ {}_1(1-b_j-f_j,\psi f_j)_{q},{}_{\beta+1}(a_j,\beta_j)_\gamma\\ {}_1(\gamma_j,\delta_j)_\alpha,\ (\sigma+ix-\lambda,\psi\lambda),\ {}_1(1-a_j-e_j,\psi e_j)_k,\ {}_{\alpha+1}(\gamma_j,\delta_j)_\delta\end{matrix}\right]$$

अन्त में (3·13) में $g(x)$ तथा $\phi(p)$ के मानों का उपयोग करने पर हमें समाकल

$$H^{\alpha,\beta+1}_{\gamma+1,\delta}\left[zp^{-\psi}\Big/\begin{matrix}(0,\psi),\ {}_1(a_j,\beta_j)_\gamma\\ {}_1(\gamma_j,\delta_j)_\delta\end{matrix}\right]=\frac{\lambda e^{(\lambda-\sigma)\pi i}}{2\pi i}\int_L e^{-u\pi i}\ H^{\alpha+n+1,\beta+m}_{\gamma+q,\delta+k+1}$$
$$\left[z\Big/\begin{matrix}{}_1(a_j,\beta_j)_\alpha,\ {}_1(1-b_j-f_j,\psi f_j)_q,\ {}_{\alpha+1}(a_j,\beta_j)_\gamma\\ {}_1(\gamma_j,\delta_j)_\beta,\ (\sigma+ix-\lambda,\psi\lambda),\ {}_1(1-a_j-e_j,\psi e_j)_k,\ {}_{\beta+1}(\gamma_j,\delta_j)_\delta\end{matrix}\right]$$
$$\times H^{q-m,k-n+2}_{k+2,q}\left[\frac{e^{\lambda\pi i}}{p}\Big/\begin{matrix}(0,1),\ (\sigma+u,\lambda),\ {}_k(-a_j,e_j)_1\\ {}_q(-b_j,f_j)_1\end{matrix}\right]du,$$

की प्राप्ति होती है बशर्ते

$$\psi>0,\ R(1+\psi\gamma_j/\delta_j)>0, j=1 \text{ से } \alpha,\ \theta\geqslant 0,\ |\arg p^{-\psi}z|\leqslant\frac{\theta\pi}{2},\ R\left(\omega+\frac{3}{2}\right)<0$$

जहाँ $\theta=\sum_1^\beta\beta_j-\sum_{\beta+1}^\gamma\beta_j+\sum_1^\alpha\delta_j-\sum_{\alpha+1}^\delta\delta_j$

तथा $\omega=\frac{1}{2}(\gamma-\delta)+\sum_1^\delta\gamma_j-\sum_1^\gamma a_j,\ R[1+\psi\gamma_j/\delta_j+b_i/f_i]>0$

जिसमें $j=1, 2, \ldots, \alpha,\ i=1, 2, \ldots, m, R\left[1-\frac{\sigma+ix}{\lambda}+\psi\frac{(a_i-1)}{\beta_i}\right]<0$

$R\left[1+\frac{a_i-1}{e_j}+\psi\frac{a_i-1}{\beta_i}\right]<0$ यदि $j=1, 2, \ldots, n,\ i=1, 2, \ldots, \beta, \psi>0,$

$A>0,\ \lambda+\phi>0,\ |\arg z|<A\,\frac{1}{2}\pi$ जहाँ $A=\sum_1^\beta\beta_j-\sum_{\beta+1}^\gamma\beta_j+\sum_1^\alpha\delta_j-\sum_{\alpha+1}^\delta\delta_j$

और (3·1) में दिये गये प्रतिबन्ध भी सम्मिलित हैं।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी० एल० जे०। **कम्पोस० मैथ०**, 1954, **15**, 239-41

2. एर्डेल्यी, ए०। Higher Transcendental Function. **भाग** II, **मैकग्राहिल,** 1353.

3. वही। Tables of Integral Transforms. भाग I, मैकग्राहिल, 1954.

4. वही। Tables of Integral Transforms. भाग II, मैकग्राहिल, 1954.

5. फाक्स, सी०। ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०, 1961, **98**, 395-429.

6. जेटविम्प। प्रोसी० एडिनबरा मैथ० सोसा०, 1964, **14**, 33-40.

7. गुप्ता, के० सी०। Annales de la societe Scientifique de Bruxelles, 1965 T. **79**, II, 97-106.

8. गुप्ता, के० सी० तथा जैन, यू० सी०। प्रोसी० नेश० एके० साइंस, इंडिया, (प्रकाशनाधीन)

9. गुप्ता, के० सी० तथा श्रीमती मित्तल, पी० के०। जर्न० अमे० मैथ० सोसा०, (प्रकाशनाधीन)

10. नायर, वी० सी०। डी० फिल० थीसिस, राजस्थान विश्वविद्यालय, 1970.

11. नायर तथा समर। मैथेमैटिका फिजिका तेओरिका, टुकुमान, अर्जेन्टाइना, (स्वीकृत)

12. टिश्मार्श। Introduction to the Theory of Fourier Integrals, द्वितीय संस्करण, आक्सफोर्ड, 1948.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 3, July, 1973, Pages 155-158

नवीन समाकल परिवर्त

ए० एन० गोयल तथा कु० इंदिरा अग्रवाल
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—अप्रैल 1, 1972]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में परिवर्त $\bar{S}(f; p)$ द्वारा हैंकेल, माइजर, फूरियर ज्या-कोज्या, लैप्लास परिवर्तों का सार्वीकरण प्राप्त होता है और अनेक अन्य अष्टियाँ मिलती हैं।

Abstract

A new integral transform. *By* A. N. Goyal and Miss Indira Aggarwala, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

The transform $\bar{S}(f; p)$ defined in this paper generalizes Hankel, Meijer, Fourier sine-cosine, Laplace transforms and gives rise to a number of other kernels. It is expected to give good results when studied deeply.

1. परिभाषा

यदि $\phi(p, x)$ प्राचल p तथा चर x का फलन हो जो (a, b) अन्तराल में पारिभाषित हो तो यह कहा जाता है कि

$$\psi(f : p) = \int_a^b \phi(p, x) \cdot f(x) \cdot dx \tag{1·0}$$

$f(x)$ के एक समाकल को परिभाषित करता है जिसकी (a, b) अन्तराल में अष्टि $\phi(p, x)$ होगी। p का प्रांत तथा जिस श्रेणी के फलन से $f(x)$ का सम्बन्ध है इस प्रकार दिए हुये होते हैं कि (1·0) विद्यमान होता है।

यहाँ हम एक समाकल परिवर्त $\bar{S}(f : p)$ को अन्तराल $(0, \infty)$ में अगे दिये हुये सम्बन्ध के द्वारा पारिभाषित करेंगे :

AP 4

$$\bar{S}\,|\,f(t):p\,|=A\int_0^\infty S_n\left(a,\beta,\gamma,\delta:\frac{p^2t^2}{16}\right)f(t)\,dt \tag{1·1}$$

जहाँ $$S_n\left(a,\beta,\gamma,\delta:\frac{p^2t^2}{16}\right)=\left[\frac{p^2t^2}{16}\right]\cdot G_{0\,4}^{\,n\,0}\left(\frac{p^4t^4}{256}\,\Big|\,a,\beta,\gamma,\delta\right)$$

G बहुविख्यात माइजर का G-फलन है। उपर्युक्त परिवर्त की अवस्थिति होती है यदि n का अनृण पूर्णांक हो कि $1\leqslant n\leqslant 4$

2. विशिष्ट दशायें

(i) जब $\beta-a=\frac{1}{2}$, $\delta-\gamma=\frac{1}{2}$, $n=2$, $A=2^{2k}\,.\,p$ तो हमें सार्वीकृत हैंकेल परिवर्त

$$p\int_0^\infty (pt)^k\,\mathcal{J}_v(pt)\,f(t)\,dt \tag{1·2}$$

प्राप्त होगा। यदि $k=\frac{1}{2}$ तो यह हैंकेल परिवर्त में परिणत हो जाता है।

(ii) जब $\beta-a=\frac{1}{2}$, $\delta-\gamma=\frac{1}{2}$, $n=4$, $A=2^{2k}p(2\pi)^{-3/2}$ तो हमें सार्वीकृत माइजर-बेसेल फलन परिवर्त

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}p\int_0^\infty (pt)^k\,K_\nu(pt)f(t)\,dt \tag{1·3}$$

प्राप्त होगा। यदि $k=\frac{1}{2}$ तो यह माइजर परिवर्त में परिणत हो जाता है।

(iii) यदि $a=a$, $\beta=b$, $\gamma=2b-a$, $\delta=b+\frac{1}{2}$, $n=1$, $A=\left(\frac{4}{p}\right)^{4b+2}\pi^{1/2}$ तो

$$\int_0^\infty t^{4b+2}I_{2(a-b)}(pt/\sqrt{2})\mathcal{J}_{2(a-b)}(pt/\sqrt{2})f(t)\,dt \tag{1·4}$$

(iv) यदि $a=a$, $\beta=a+\frac{1}{2}$, $\gamma=b$, $\delta=2a-b$, $n=1$, $A=(4\pi)^{1/2}\left(\frac{4}{p}\right)^{4a+2}\cos\,(b-a)\pi$,

तो $$\int_0^\infty t^{4a+2}[I_{2(b-a}(pt/\sqrt{2})\mathcal{J}_{2(a-b)}(pt/\sqrt{2})+I_{2(a-b)}(pt/\sqrt{2})\,\mathcal{J}_{2(b-a)}(pt/\sqrt{2})]f(t)\,dt \tag{1·5}$$

(v) यदि $a=a+\frac{1}{2}$, $\beta=a$, $\gamma=b$, $\delta=2a-b$, $n=1$, $A=(4\pi)^{1/2}\left(\frac{4}{p}\right)^{4a+2}\sin\,(a-b)\pi$,

तो $$\int_0^\infty t^{4a+2}[\mathcal{J}_{2(a-b)}(pt/\sqrt{2})I_{2(b-a)}(pt/\sqrt{2})-I_{2(a-b)}(pt/\sqrt{2})\,\mathcal{J}_{2(b-a)}(pt/\sqrt{2})]f(t)\,dt \tag{1·6}$$

(vi) यदि $a=3a-\frac{1}{2}$, $\beta=a$, $\gamma=-a-\frac{1}{2}$, $\delta-a-\frac{1}{2}$, $n=3$, $A=\left(\frac{4}{p}\right)^{4a}(4\pi)^{-1/2}\cos\,(2a\pi)$

तो $$\int_0^\infty t^{4a}K_{4a}(pt/\sqrt{2})[\mathcal{J}_{4a}(pt/\sqrt{2})+\mathcal{J}_{-4a}(pt/\sqrt{2})]\,f(t)\,dt \tag{1·7}$$

(vii) यदि $\alpha=0, \beta=a-\frac{1}{2}, \gamma=-a-\frac{1}{2}, \delta=\frac{1}{2}, n=3, A=\frac{1}{4}\pi^{-1/2}$

तो $$\int_0^\infty K_{2a}pt/\sqrt{2})[\mathcal{J}_{2a}(pt/\sqrt{2}) \cos a\pi - y_{2a}(pt/\sqrt{2}) \sin a\pi] f(t)\, dt \tag{1·8}$$

(iiv) यदि $\alpha=-\frac{1}{2}, \beta=a-\frac{1}{2}, \gamma=-a-\frac{1}{2}, \delta=0, n=3, A=-\frac{1}{4}\pi^{-1/2}$,

तो $$\int_0^\infty K_{2a}(pt/\sqrt{2})[\mathcal{J}_{2a}(pt/\sqrt{2}) \sin a\pi + y_{2a}(pt/\sqrt{2}) \cos a\pi] f(t)\, dt \tag{1·9}$$

(ix) यदि $\alpha=a, \beta=b+\frac{1}{2}, \gamma=b, \delta=2b-a \quad n=3, A=\left(\frac{4}{p}\right)^{4b+2} (2\pi)^{-1/2}$,

तो $$\int_0^\infty t^{4b+2} K_{2(a-b)}(pt/\sqrt{2}) \mathcal{J}_{2(a-b)}(pt/\sqrt{2}) f(t)\, dt \tag{2·0}$$

प्रतिलोमन सूत्र

$f(t)$ के लिये सरल करने पर समाकल समीकरण (1·1) का हल निम्नांकित प्रमेय की सहायता से सरलता से प्राप्त हो जाता है :

प्रमेय : माना $$h(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{t^{-s}}{G(1-s)}\, ds \tag{2·1}$$

जहाँ $$G(1-s)=\frac{a^{3-s/2} \prod_{j=1}^{n} \left(b_j+\frac{3-s}{4}\right)}{4^{+s} \prod_{j=n+1}^{4} \left(1-b_j-\frac{3-s}{4}\right)}, \quad b_1=\alpha, b_2=\beta, b_3=\gamma, b_4=\delta \tag{2·2}$$

तो $$f(t)=A^{-1}\int^\infty h(tp)\bar{S}(f:p)\, dp \tag{2·3}$$

उपपत्ति : (1·1) से $\bar{S}(f:p)$ का मान रखने पर

$$\int_0^\infty A^{-1}p^{-s}\bar{S}(f:p)\, dp=\int_0^\infty A^{-1}p^{-s} \left\{A\int^\infty S_n\left(\alpha, \beta, \gamma, \delta : \frac{p^2t^2}{16}\right)f(t)\, dt\right\} dp$$

जिसमें समाकलन के क्रम में परिवर्तन करने तथा सरल प्रतिस्थापन द्वारा

$$\int^\infty A^{-1}p^{-s}\bar{S}(f:p)\, dp=[4^{-s}a^{3-s/4}] \int_0^\infty t^{s-1}f(t)\, dt \left\{\int_0^\infty u^{(3-s/4)-1} G_{0\,4}^{n\,0} [au/\alpha, \beta, \gamma, \delta]\, du\right\}$$

प्राप्त होता है । चूँकि t तथा u समाकल एक दूसरे पर आश्रित नहीं हैं अतः आन्तरिक समाकल का मान निकालने पर

$$\int_0^\infty t^{s-1}f(t)\, dt=\int_0^\infty A^{-1}p^{-s}\bar{S}(f:p)/G(1-s)\, dp$$

अब मेलिन के प्रतिलोमन सूत्र (1) को प्रयुक्त करने तथा समाकलन के क्रम को बदल देने पर हमें (2·3) की प्राप्ति होती है।

समाकलन के क्रम में परिवर्तन को वैध बनाने के लिये हम पाते हैं कि $G_{04}^{n\,0}(x)$ चर घातांकी रूप से विलुप्त हो जाता है यदि $n>2$ तथा $|\arg x|<(n-2)\pi$। इन्हीं तर्कों से μ-समाकल पूर्णत: अभिसारी होता है यदि

$$-\min_{1\leqslant j\leqslant n} R(b_j)<R\left(\frac{3-s}{4}\right)<1$$

परिणामी समाकल अभिसारी होगा यदि $p^{-s}A^{-1}\,.\,\overline{S}\,(f:p)\epsilon L(0,\infty)$.

इस प्रकार द ला पूसिन प्रमेय[2] के द्वारा यह परिवर्तन वैध है। इस प्रतिलोमन सूत्र के अन्तर्गत वे दशायें नहीं आतीं जिनमें $n=2$ तथा $n=1$, इस पर विचार करते हुये हम पाते हैं कि यदि $n=2$ तो यह सार्वीकृत हैंकेल परिवर्त की दशा है जो $x=\frac{1}{2}$ होने पर हैंकेल परिवर्त में परिणत हो जाती है और हमें यह पता है कि हैंकेल परिवर्त आत्मव्युत्क्रमहै। $n=1$ दशा के लिये हम प्रतिलोमन सूत्र नहीं प्राप्त कर पाये फलत: समीकरण (1·4), (1·5) तथा (1·6) मात्र औपचारिक हैं।

निर्देश

1. टिश्मार्श, ई० सी०। Theory of Fourier Integral, **आक्सफोर्ड, क्लैरेंडन**, 1937.
2. ब्रामविच, टी० जे० आई०। An Introduction to the Theory of Infinite Series, **द्वितीय संस्करण, लंदन, मैकमिलन** 1949.
3. एर्डेल्यी, ए०। Tables of Integral Transforms, **भाग** II, **मैकग्राहिल** 1954.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 3, July, 1973 Pages 159-167

ग्राहम लवण के जलीय विलयनों पर पराश्रव्य तरंगों का प्रभाव

ए० सी० चटर्जी* तथा एच० एन० भार्गव
रसायन विभाग, गोरखपुर विश्वविद्यालय

[प्राप्त—अक्टूबर 10, 1972]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में संश्लिष्ट उच्च अणुभार वाले पालीफास्फेटों पर निम्न तथा उच्च आवृति वाले पराश्रव्य कम्पनों के प्रभावों का वर्णन किया गया है।

Abstract

Effect of ultrasonic waves on aqueous solutions of Graham's salt. *By* A. C. Chatterji, Department of Chemistry, Lucknow University and H. N. Bhargava, Department of Chemistry, Gorakhpur University.

The present study relates to the effects of low and high frequency ultrasonic vibrations on synthetic high-molecular weight polyphosphates.

रसायन विज्ञान में श्रव्य तथा पराश्रव्य दोनों प्रकार की तरंगों के अनेक सम्प्रयोग ज्ञात हैं। लगभग चार दशक पूर्व तक ध्वनि तरंगों के रासायनिक तथा जैव प्रभावों पर जो भी कार्य सम्पन्न हुआ था उसका वर्णन बायल[1] ने किया है। 1930 ई० में फ्रयूण्डलिख[2-5] ने पराश्रव्य तरंगों के द्वारा थिक्सोट्रापीय जेलों के द्रवीकरण का उल्लेख किया है। वास्तव में यह तथाकथित 'त्रुटिपूर्ण' अथवा 'संरचनात्मक' श्यानता में चरम परिवर्तन था। मार्क[6] ने उच्च बहुलक शोध के क्षेत्र में पराश्राव्यिकी के कुछ उपयोगों की विवेचना की है। उनके अनुसार जेलों की श्यानता में जो अस्थायी परिवर्तन देखे जाते हैं वे वान-डर-वाल बन्धों के अस्थायी रूप से खुल जाने के कारण होते हैं। किन्तु जब नाइट्रोसेलुलोस, पालीवीनिल ऐसीटेट तथा पालीस्टिरीन जैसे उच्च बहुलकों के विलयनों को उच्च आवृति वाली पराश्रव्य तरंगों से उपचारित किया जाता है तो रासायनिक बन्धों के निम्नीकरण के कारण स्थायी परिवर्तन देखा जाता है। 1944 ई० में सालनर[7] ने पराश्रव्य जनित्रों के विविध प्रकारों एवं भौत-रासायनिक अध्ययनों में उनके उपयोग का वर्णन किया है।

---

* लखनऊ विश्वविद्यालय, लखनऊ

यह ज्ञात है कि पराश्रव्य तरंगों के द्वारा निम्नीकरण प्रभाव उत्पन्न होते हैं। सर्वप्रथम चैम्बर्स तथा गेंन्ज[8] और सालनर तथा बांडी[9] द्वारा प्रस्तुत कोटरीकरण सिद्धांत के अनुसार अनेक निम्नीकारी प्रक्रमों के लिये कोटरिकाओं का निर्माण तथा उनका तेजी से विनाश उत्तरदायी होते हैं। प्रारम्भ में प्रकृति में पाये जाने वाले उच्च बहुलकों पर शोध कार्य हुये, जैसे स्टार्च, गोंद तथा जिलैटिन[5, 10, 11]। किन्तु इन प्राकृतिक पदार्थों की समांगता संदिग्ध होने से संश्लिष्ट उच्च बहुलकों के साथ कार्य करते हुये अधिक सही सूचना प्राप्त करने के प्रयास किये गये। श्मिट तथा सहयोगियों[12–17] ने संश्लिष्ट उच्च बहुलकों के साथ लगभग 10 वर्षों तक कार्य किया। उन्होंने यह निष्कर्ष निकाला कि यह निम्नीकरण एकलक अवस्था तक न पहुँच कर अन्तर्वर्ती शृंखला लम्बाई तक ही सीमित रहा जाता है। किन्तु निम्नीकरण की गति शृंखला की लम्बाई, विलायक की प्रकृति, बहुलक विलयन की सान्द्रता, पराश्रव्य स्रोत की धारा क्षमता तथा किरणीभवन की अवधि पर निर्भर करती है। प्रूढाम[18, 19] ने पराश्रव्य तरंगों द्वारा पालीस्टिरीन तथा कार्बोक्सीमेथिल सेल्यूलोस के निम्नीकरण का अध्ययन किया है। उनके अनुसार विबहुलीकरण में सबसे महत्वपूर्ण कार्य कोटरीकरण का है। विलायक तथा बहुलक अणुओं के मध्य घर्षण बलों का इसमें विशिष्ट योगदान नहीं रहता। प्रूढाम तथा ग्रेबर[18] ने यह ज्ञात किया कि विबहुलीकरण के लिये आवश्यक समय तथा ध्वनि की तीव्रता में व्युत्क्रम अनुपात पाया जाता है किन्तु विलयन सान्द्रता और समय में प्रत्यक्ष समानुपात देखा जाता है। फिर भी अन्तिम पदार्थ में बहुलीकरण की मात्रा इन कारकों से सर्वथा मुक्त रहती है।

श्मिट तथा प्रूढाम के विचारों की पुष्टि जापान के[20–22] तथा अमरीका के[23] कार्यकर्ताओं के कार्यों द्वारा हुई है। जेलिनेक तथा व्हाइट[23] ने निम्नीकरण के समय बहुलक के कणाकारों पर भी विचार किया और निम्नीकरण की एक क्रियाविधि विकसित की है।

मोस्तफा[25] ने पराश्रव्य तरंगों द्वारा योगशील बहुलकों के निम्नीकरण का विस्तृत अध्ययन प्रस्तुत किया है। उनके फलों से यह स्पष्ट हो जाता है कि निर्म्नीकरण की अनुकूलतम तीव्रता सम्भव है और कोटरीकरण की अनुपस्थिति में भी पराश्रव्य तरंगों के द्वारा निम्नीकरण हो सकता है।

हाल ही में चन्द्रा तथा रायचौधरी[25] और चन्द्रा, रायचौधरी तथा विश्वास[26] ने α-ब्यूटिल रबर विलयन के निम्नीकरण की गतिकी का अध्ययन किया है। पालिस्टिरीन[27] तथा पालीसिलोक्सेन[28] विलयन के पराश्रव्य निम्नीकरण में जेल पारगमित क्रोमैटोग्राफी का प्रयोग किया जा चुका है।

जिन जैव यौगिकों का अध्ययन हो चुका है उनमें से डिआक्सी रिबोन्यूक्लीइक अम्ल *DNA* सम्बंधी लालैंड, ओवरैंड तथा स्टेसी[29] के प्रयोग उल्लेखनीय हैं। उन्होंने यह निष्कर्ष निकाला है कि पराश्रव्य तरंगों के फलस्वरूप *DNA* का विसंघट्टन होता है और कम जटिल पालीन्यूक्लीयोटाइड बनते हैं। उनके प्रेक्षणों की पुष्टि एवं विस्तार गोल्डस्टीन तथा स्टर्न[30] द्वारा हुआ है। अभी हाल ही में फ्राइफेल्डर तथा डेविसन[31] और रायाबचेन्को इत्यादि[32] ने *DNA* के पराश्रव्य निम्नीकरण पर अध्ययन किये हैं।

संघनित फास्फेट अद्वितीय उदाहरण प्रस्तुत करता है जो जैव तथा संश्लिष्ट दोनों ही प्रकार का बहुलक है। जीवाणुओं के कोशिका रहित विरचनों में इसके संश्लेषण का प्रदर्शन[33] तथा ट्रांसफास्फोरिली-

करण अभिक्रियाओं में[33] इसकी ऊर्जा के सदुपयोग होने के कारण सूक्ष्मजीवों के ऊर्जा उपापचय में मेटाफास्फेटों की महत्ता पर दृष्टि गई है। प्रस्तुत अध्ययन में संश्लिष्ट उच्च अणुभार वाले पालीफास्फेटों पर उच्च तथा निम्न पराश्रव्य कम्पनों के प्रभावों का वर्णन किया गया है।

प्रयोगात्मक

इस अध्ययन में प्रयुक्त ग्राहम लवण के नमूनों से सम्बन्धित जानकारी एक पूर्व सूचना में दी जा चुकी है[35]। इनको तैयार करने के लिये सोडियम डाइहाइड्रोजन फास्फेट को प्लैटिनम मूषा में लेकर 700-900° से० ताप के बीच विभिन्न कालों तक गरम किया गया और द्राव को निष्कलंक इस्पात की पट्टिकाओं पर बुझा लिया गया। फिर चूर्ण करके 2-4 घंटों के ही भीतर वांछित सान्द्रता के विलयन (0·25-1·0%) तैयार कर लिये गये।

मुलर्ड 2 किलोवाट निम्न आवृति जनित्र, टाइप E7696 की सहायता से 25 किलोसाइकिल प्रति सेकंड आवृति वाली पराश्रव्य तरंगें उत्पन्न की गईं। विलयन को पतली दीवाल वाले निष्कलंक इस्पात के बने पात्र में भरा गया जो एक वैद्युत चुम्बक से जुड़ा हुआ था। इस सम्पूर्ण निकाय को पिघलने वाले वर्फ के अवगाह में रखा गया।

उच्च आवृति की पराश्रव्य तरंगें (0·25, 0·50 तथा 2·0 मेगासाइकिल/सेकंड आवृति की) मुलर्ड उच्च आवृति वाले पराश्रव्य जनित्र द्वारा उत्पन्न की गईं। ये तरंगें क्वार्ट्ज क्रिस्टल से निकलकर जल में प्रविष्ट हुईं और फिर पतली दीवाल वाले काँच के पलिघ में रखे हुये मेटाफास्फेट विलयन पर केन्द्रित की गईं। अवगाह का ताप 30° से० पर स्थिर रखा गया।

श्यानता का मापन ओसवाल्ड श्यानतामापी द्वारा किया गया जिसमें शुद्ध जल का प्रवाह-समय लगभग 125 सेकंड था। घनत्व का मापन ओसवाल्ड-स्प्रेंगेल पिकनोमीटर द्वारा किया गया।

चालकता ज्ञात करने के लिये लीड्स-नार्थप कम्पनी द्वारा तैयार किये गये ढोलाकार सेतु (माडल 174565) का उपयोग किया गया। इसमें एक हेड फोन था और एक स्वतोदोलित्र था जिसकी आवृति 1000 चक्र / सेकंड थी। विलयनों को जोन्स चालकता सेल में भरा गया। इस सेल का सेल-स्थिरांक 1·606 था।

श्यानता तथा चालकता सम्बन्धी सभी मापन 35$\pm$0·5° से० पर किये गये।

विवेचना

निम्न आवृति वाली पराश्रव्य तरंगों के प्रभाव

सारणी 1 में निम्न आवृत्ति (25 किलो चक्र / सेकंड) की पराश्रव्य तरंगों के किरणीभवन से विशिष्ट श्यानता (nsp/c) तथा औसत अणुभार ($M\omega$) और चालकता (K) में होने वाले परिवर्तन अंकित हैं। किरणीभवन के तुरन्त बाद ही नियन्त्रित तथा उपचारित विलयनों की श्यानतायें तथा चालकतायें

ज्ञात कर ली गई। किन्हीं-किन्हीं नमूनों की श्यानतायें तथा चालकतायें कमरे के ताप पर 24 घंटे तक रखे रहने के बाद यह देखने के लिये ज्ञात की गईं कि प्रभाव स्थायी था अथवा नहीं। $M\omega$ का परिगणन चटर्जी तथा भार्गव[35] द्वारा सुझाये गये निम्नांकित समीकरण की सहायता से किया गया :

$$M\omega = 33\cdot100(nsp/c)1\%_{H_2O} + 850$$

सारणी 1 से यह प्रकट हो जाता है कि जब ग्राहम लवण के विभिन्न नमूनों के 9% विलयनों को निम्न आवृति वाली पराश्रव्य तरंगों से अनुप्रभावित किया जाता है तो श्यानता में 4—20% तक का ह्रास होता हैं। $M\omega$ का प्रारम्भिक मान जितना ही उच्च होगा, उतना ही अधिक श्यानता में ह्रास होगा। जब अनुप्रभाव काल को बढ़ाकर 60 मिनट कर दिया गया तो श्यानता में आगे भी ह्रास हुआ यद्यपि यह पर्याप्त नहीं था। अधिक तनु विलयन (0·25%) लेने पर श्यानता में और अधिक ह्रास हुआ। यह ह्रास 24 घंटे तक संग्रह करने पर भी चलता रहा।

अनुप्रभावित विलयनों की चालकता में थोड़ी सी वृद्धि हुई जो 0·2 से 3% तक थी। सामान्यतया किरणीभवन के फलस्वरूप उच्चतर $M\omega$ वाले नमूने से चालकता में अधिक वृद्धि हुई। यह परिवर्तन स्थायी पाया गया और 24 घंटे तक रखे रहने के बाद भी चालकताओं में परिवर्तन होता रहा।

उच्च आवृति वाली पराश्रव्य तरंगों का प्रभाव

विलयनों को विलीनीकरण के 5-6 घंटे बाद पराश्रव्य तरंगों से अनुप्रभावित किया गया। किरणी-भवन के तुरन्त ही बाद 35±0·5° से० पर अनुपचारित तथा उपचारित नमूनों की श्यानतायें तथा चालकतायें ज्ञात की गईं। सारणी 2-4 में संगत फल अंकित हैं। प्रत्येक सारणी में किरणीभवन के समय दोलन कैथोड धारा, एच० टी० वोल्ट, आर० एफ० प्राप्ति वोल्ट को जिन मानों पर रखा गया, वे अंकित हैं और क्रमशः M_1, M_2 तथा M_3 द्वारा व्यक्त हुये हैं। उच्च आवृति वाली पराश्रव्य तरंगों के अनुप्रभाव से श्यानता में जो वृद्धि आती है वह उच्च आवृति पराश्रव्य तरंगों की अपेक्षा कहीं कम होती है। चालकतायें भी अपरिवर्तित रही आईं। 24 घंटे तक संग्रह करने के बाद जब श्यानता तथा चालकता के मान ज्ञात किये गये तो कोई अन्तर नहीं देखा गया।

निम्न आवृति वाले पराश्रव्य क्षेत्र में दीर्घ शृंखलपालीफास्फेट, ग्राहम लवण, का प्रभाव कई अर्थों में अन्य बहुविद्युत अपघट्यों की तरह का होता है। इसमें बहुलक का विखंडन होता है जिसका संकेत श्यानता में ह्रास तथा अन्तिम समूह अणुभार में युगपत ह्रास से मिलता है (तिवारी[36])। चालकता में भी वृद्धि होती है। ये परिवर्तन स्थायी होते हैं और 24 घंटे तक संग्रह करने के बाद भी नहीं बदलते। यह आचरण कतिपय प्राकृतिक बहुविद्युत-अपघट्यों से भिन्न है क्योंकि ऐगार-ऐगार तथा कुछ गोंदे त्रुटिपूर्ण (या संरचनात्मक) श्यानता प्रदर्शित करती हैं किन्तु इन अनुप्रभावित विलयनों को यदि संग्रह किया जाय तो श्यानता की आंशिक पूर्ति हो जाती है[5]। पालीफास्फेट विलयन की श्यानता में ह्रास का कारण $P-0-P$ सहसंयोजक बन्धों का विखंडन हो सकता है, मिसेल संरचना का विसंघट्टन नहीं। डेविज़ तथा मांक[37] ने यह स्थापना की है कि ग्राहम लवण के विलयनों में मिसेल-निर्माण नहीं होता। चटर्जी तथा

भार्गव[38] ने भी ज्ञात किया है निम्न अणुभार वाले पालीफास्फेट नमूनों की चालकतायें उच्चतर अणुभार वालों से अधिक होती हैं। फलतः यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि किरणीभवन के फलस्वरूप चालकता में वृद्धि का कारण निम्न अणुभार वाले यौगिकों का बनना है।

ऐसा लगता है कि $M\omega$ तथा निम्नीकरण की मात्रा में निश्चित सम्बन्ध होता है। इनमें से दूसरे में शृंखला की वृद्धि होने पर क्रमोत्तर वृद्धि होती जाती है। यह प्रेक्षण जेलिनेक तथा व्हाइट[23] के फलों की पुष्टि करता है क्योंकि उन्होंने यह सूचित किया है कि पालीस्टिरीन के निम्नीकरण की दर शृंखला की लम्बाई पर निर्भर होती है। ग्राहम लवण की सान्द्रता घटा देने पर निम्नीकरण में तेजी से होने वाले परिवर्तन श्मिट तथा सहयोगियों[12–17] द्वारा प्राप्त फलों के अनुकूल हैं।

प्रस्तुत अध्ययन में साथ-साथ आर्थोफास्फेट का विश्लेषण तिवारी[36] द्वारा आइसोब्यूटैनाल निष्कर्षण विधि[39] की सहायता से किया गया। इससे यह पता चला कि जब मूल नमूनों में पहले से आर्थोफास्फेट विद्यमान रहता है तो 30 या 60 मिनट तक अनुप्रभावन से अथवा 1% के बजाय 0·25% विलयन प्रयुक्त करने से उसमें कोई परिवर्तन नहीं आता। पूर्ववर्ती कार्यकर्ताओं[13,23] ने भी देखा है कि बहुलकों के पराश्रव्यीय निम्नीकरण से एकलकों का निर्माण कभी भी नहीं होता। तिवारी[36] द्वारा किये गये अपोहन प्रयोगों के अनुसार नियन्त्रण प्रयोगों की तुलना में किरणीयित विलयन से प्राप्त अपोहनज कुल फास्फेट की मात्रा अधिक नहीं होती। इससे यह सूचित होता है कि बहुलक अणु के विखण्डन से निम्न अणुभार वाले अपोहनीय खण्डों की प्रचुर मात्रा निर्मित नहीं होती। निम्नतर संघनित फास्फेटों—पाइरोफास्फेट, ट्राइ तथा टेट्रा पालीफास्फेट तथा ट्राइ और टेट्रामेटाफास्फेट—के साथ किये गये तिवारी[36] के प्रयोग यही सूचित करते हैं कि पराश्रव्य तरंगों के द्वारा इन फास्फेटों में कोई निम्नीकरण नहीं होता। चूँकि किरणीभवन के फलस्वरूप अपोहनीय पदार्थ नहीं बनते अतः यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि उच्च-आणविक फास्फेटों के विबहुलीकरण से उपर्युक्त संघनित फास्फेट नहीं बनते।

उच्च आवृति वाली पराश्रव्य तरंगों के उपयोग से प्राप्त फलों की विवेचना कठिन है। श्यानता में कुछ कुछ ह्रास होता है जिससे विबहुलीकरण का संकेत मिलता है। किन्तु चालकता में कोई परिवर्तन नहीं होता। प्रूढम[40] ने सुझाव रखा है कि ऐसे प्रयोगों में जो परिस्थितियाँ रहती हैं वे कोटरीकरण के लिये अनुकूल नहीं होतीं और उसकी अनुपस्थिति में निम्नीकरण नहीं हो पाता। लेकिन जैसा कि मोस्तफा[24] ने सूचित किया है, कोटरीकरण की अनुपस्थिति में भी कुछ न कुछ निम्नीकरण सम्भव है और यही कारण है कि प्रस्तुत अध्ययन में ऐसा पाया गया है। चालकता[38] द्वारा अणुभार में लघु परिवर्तन होने पर कुछ पता नहीं चल पाता और यही कारण हो सकता है कि $M\omega$ में थोड़ा ह्रास होने पर भी चालकता नहीं बदली। पराश्रव्य तरंगों द्वारा अधिशोषित आयनों का विखण्डन या मुक्त आयनों की निपीति भी सम्भव नहीं है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक सेंट्रल ड्रग रिसर्च इंस्टीच्यूट, लखनऊ के निदेशक के प्रति आभार प्रकट करते हैं जिन्होंने निम्न आवृति पराश्रव्य जनित्र के साथ काम करने की अनुमति दी।

सारणी 1

निम्न आवृत्ति वाली पराश्रव्य तरंगों के द्वारा ग्राहम लवण के जलीय विलयन के किरणीभवन से प्राप्त η_{sp}, $M\omega$ तथा K में होने वाले परिवर्तन

नमूना संख्या	बिना किसी उपचार के			अनुप्रभावित			% ह्रास		K में %वृद्धि
	η_{sp}	$M\omega$	K ($\times 10^3$ म्हो)	η_{sp}	$M\omega$	K ($\times 10^3$ म्हो)	η_{sp}	$M\omega$	
				A. किरणीभवन की अवधि 30 मिनट, सान्द्रता 10%					
24	0·113	4990	...	0·111	4515	...	1·8	1·6	...
47	0·208	7740	4·292	0·199	7440	4·302	4·2	3·8	0·2
43	0·222	8200	3·593	0·217	8030	3·593	2·25	2·1	0·0
44	0·255	9290	...	0·224	8260	...	12·2	11·1	...
51	0·378	13360	...	0·339	12070	...	10·3	9·7	...
58	0·407	14320	3·453	0·352	12500	3·506	13·5	12·7	1·5
57	0·431	15100	3·418	0·367	12990	3·469	14·9	14·1	1·5
60	0·487	16970	3·382	0·421	14780	3.440	13·5	12·9	1·7
64	0·538	18330	3·404	0·417	14650	3·463	21·0	20·1	1·7
				B. किरणीभवन की अवधि 60 मिनट, सान्द्रता 1·0%					
47	0·208	7735	4·292	0·196	7340	4·315	5·8	5·1	0·5
58	0·415	14590	3·453	0·348	12370	3·511	16·1	15·2	1·7
60	0·478	16670	3·382	0·384	13560	3·453	19·7	18·7	2·1
64	0·530	18390	3·404	0·392	13820	3·510	26·0	24·9	3·1
				C. किरणीभवन की अवधि 30 मिनट, सान्द्रता 0·25%					
58	0·178	14600	...	0·150	...	...	15·7	...	...
57	0191	15100	...	0·156	...	...	18·3	...	...
60	0·216	16700	...	0·183	...	...	15·3	...	...

सारणी 2

ग्राहम लवण विलयन पर 0.25 मेगा चक्र / से० आवृति वालो पराश्रव्य तरंगों का प्रभाव

$M_1 \approx 0{\cdot}28-0{\cdot}34$ ऐम्पियर, $M_2 \approx 2{,}000-2{,}200$ वोल्ट

$M_3 \approx 3{\cdot}2-3{\cdot}6$ किलोवोल्ट

किरणीभवन की अवधि 30 मिनट

नमूना संख्या	$M\omega$	सान्द्रता	विशिष्ट चालकता अनुपचारित	विशिष्ट चालकता उपचारित	विशिष्ट श्यानता अनुपचारित	विशिष्ट श्यानता उपचारित	η_{sp} में ह्रास
			म्हो $\times 10^3$				
35.	8000	1·0	3·710	3·710	0·200	0·196	2·0%
41.	11000	1·0	3·652	3·652			
66.	18600	1·0	3·350	3·350	0·540	0·535	0.93%
65.	20600	1·0	3·382	3·382	0·590	0·584	1·02%

सारणी 3

ग्राहम लवण के विलयनों पर 0·5 *Mcs/sec* आवृत वाली पराश्रव्य तरंगों का प्रभाव

$M_1 \approx 0{\cdot}18-0{\cdot}22$ ऐम्पियर, $M_2 \approx 2{,}300-2{,}800$ वोल्ट

$M_3 \approx 3{\cdot}2-3{\cdot}4$ किलोवोल्ट

नमूना संख्या	$M\omega$	सान्द्रता	किरणीभवन की अवधि मिनट	विशिष्ट चालकता अनुप०	उप० महो × 10^3	श्यानता अनुप०	उप०	η_{sp} में ह्रास
51.	13700	1·00	30	3·430	3.430	0·371	0·366	1·35%
61.	15200	1·00	30	3·57	3·57	0·422	0·418	0·95%
54.	19100	0·88	30	...	...	0·478	0·469	1·88%
55.	14000	4·00	60	11·84	11·84	0·880	0·866	1·75%
55.	14000	0·50	60	3·421	3·421	0·249	0·246	1·20%

सारणी 4

ग्राहम लवण के विलयनों पर 2*Mcs/sec* आवृति वाली पराश्रव्य तरंगों का प्रभाव

$M_1 \approx 0{\cdot}28-0{\cdot}34$ ऐम्पियर, $M_2 \approx 2{,}000-2{,}200$ वोल्ट

$M_3 \approx 1{\cdot}4-1{\cdot}6$ किलोवोल्ट

नमूना संख्या	$M\omega$	सान्द्रता	किरणीभवन की अवधि	विशिष्ट चालकता अनुपचारित	उपचारित महो × 10^3	विशिष्ट श्यानता अनुप०	उप०	η_{sp} में ह्रास
51.	13700	0·5	30 मिनट	1·868	1·868	0·253	0·241	4·71%
51.	13700	0·5	60 ,,	1·868	1·868	0·253	0·240	5·14%
54.	19100	0·5	30 ,,	1·8 10	1·810	0·346	0·332	4·05%

निर्देश

1. बॉयल, आर० डब्लू० । **साइं० प्रोग्रे०**, 1928, **23**, 75.
2. फ्यूण्डलिख, एच०, रोगोस्की, एफ० तथा साल्नर, के० । Z. phys. Chem. A. 1932, **160**, 469; Kolloid Beih. 1933, **67**, 223.
3. फ्यूण्डलिख, एच०, तथा सॉल्नर, के० । **ट्रांजै० फैराडे सोसा०**, 1936, **32**, 966.
4. फ्यूण्डलिख, एच० । **जर्न० फिजि० केमि०**, 1937, **41**, 1151.
5. फ्यूण्डलिख, एच० तथा गिलिंग्स, डी०डब्लू० : **ट्रांजै० फैराडे सोसा०**, 1938, **34**, 469.

6. मार्क, एच० । — **जर्न० एकाउ० सोसा० अमे०**. 1945, **16**, 183.

7. साल्नर, के० । — **केमि० रिव्यू०**, 173 ,43 ,1944

8. चैम्बर्स, एल० ए० तथा गैन्स, एन० जे० । — **जर्न० सेल्यूलर काम्प० फिजियो०**, 1932, **1**, 451.

9. साल्नर, के० तथा बांडी, सी । — **ट्रांजै० फैराडे सोसा०**, 1935, **31**, 835.

10. जेंट-ग्यारगी, ए० । — **नेचर**, 1933, **131**, 278.

11. जाले, ए० । — Z. phys. Chem. 1934, **164 A,** 234; Phys. Z. 1934, **35**, 293.

12. श्मिट, जी० । — Anger Chem., 1936, **49**, 117; Z. Elektrochem. 1938, **44**, 728; Phys. Z. 1940, **41**, 326; Z.Phys. Chem. 1940, **186A,** 113; Chemie. 1943, **56**, 67.

13. श्मिट, जी० तथा रोमेल, ओ० । — Z. Elektrochem., 1939, **45**, 659; Z. Phys. Chem. 1939, **185A**, 97.

14. श्मिट, जी० तथा ब्यूटेनमुलर, ई० । — Z. Elektrochem., 1943, **49**, 325.

15. श्मिट, जी०, ब्यूटेनमुलर, ई० तथा रीफ०, ए० । — Kunstoff-Technik und Kunstoff-An Wendung, 1943, **13,** 65.

6. श्मिट, जी० तथा पापे, डब्लू० । — Z. Elektrochem, 1949, **53,** 28.

17. श्मिट, जी०, पैरेट, जी० तथा फ्लाइडरर एच० । — Kolloid Z., 1951, **124**, 150.

18. प्रूढाम, आर० ओ० तथा ग्रेबर, पी० । — J. Chim. Phys., 1949, **46,** 667.

19. प्रूढाम, आर० ओ० । — J. Chim. Phys., 1950, **47,** 795.

01. सोबू, एच० । — Chem. High Polymers (Japan), 1944, **1,** 70.

21. सोबू, एच० तथा कावाइ, एच० । — **वही** 1944, 1, 65,; 1945, **2**, 272; J. Soc. Chem. Ind. (Japan), 1946, **49**, 36.

222. सोबू, एच० तथा इशिकावा, के० । — **जर्न० केमि० सोसा० (जापान)**, 1949, **70,** 456; 1950, **71,** 25, 130; J. Soc. Textile Cellulose Ind (Japan), 1949, **5,** 366, 369; 1950, **6**, 10.

.23. जेलिनेक, एच० एच० जी० तथा व्हाइट, जी० । — **जर्न० पालिमर सांइ०**, 1951, **6,** 745 757; 1951, **7**, 1, 23.

24. मोस्तफा, एम० ए० के० । — **वही**, 1955, **22,** 535; 1958, **33**, 295.

.52 वही । — **वही**, 1958, **33,** 323.

26. चन्द्रा, एस० तथा रायचौधरी, पी० । **इन्डियन जर्न० केमि०**, 1965, **3**(8), 338.

27. चन्द्रा, एस०, रायचौधरी, पी०, तथा बिश्वास, ए० बी० । **जर्न० एप्लाइड पालीमर साइंस**, 1966, **10**(8), 1089.

28. स्मिथ, जे० डब्लू० तथा टेम्पल, एच० डब्लू० । **जर्न० फिजि० केमि०**, 1968, **72**(13), 4613.

29. शा, एम० टी० तथा रूर्डीगेज, एफ० । **जर्न० ऐप्लाइड पालीमर साइंस**, 1967, **11**, 971.

30. लालैंड, एस० जी०, ओवरैंड, डब्लू० जी० तथा स्टैसी, एम० । **जर्न० केमि० सोसा०**, 1952. 303.

31. गोल्डस्टीन, जी० तथा स्टर्न, के० जी० । **जर्न० पालीमर साइंस**, 1950, **5**, 687.

32. फ्रीफेल्डर, डी० तथा डैविसन, पी० एफ० । **बायोफिजि० जर्न०** 1962, **2**, 235.

33. रायाबचेन्को, एम० आई०, ब्रैगिन्स्काया, एफ० आई०, एलपिनर, आई० ई० तथा सीटलिन, पी० आई० । Biofizika, 1964, **9**(2), 162.

34. कार्नबर्ग, ए०, कार्नवर्ग, एस० आर० तथा सिम्स, ई० एस० । Biochim. et Biophys. Acta, 1956, **20**, 215.

35. विंडर, एफ० जी० तथा डेनेनी, जे० एम० । **जर्न० जनरल माइक्रोबा०**, 1957, **17**, 573.

36. चटर्जी, ए० सी० तथा भार्गव, एच० एन० । **जर्न० पालीमर साइंस**, 1959, **35**, 235.

37. तिवारी, के० के० । **पी-एच०, डी० थीसिस, लखनऊ यूनिवर्सिटी** 1960.

38. डेवीस, सी० डब्लू० तथा मांक, सी० बी० । **जर्न० केमि० सोसा०**, 1949, 413.

39. चटर्जी, ए० सी० तथा भार्गव, एच० एन० । Kolloid Z., 1960, **170**, 116.

40. बेरेनब्लम, आई० तथा चेन, ई० । **बायोकेमि० जर्न०**, 1938, **22**, 295.

41. प्रूढाम, आर० ओ० । **(व्यक्तिगत सूचना)**

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No 3, July, 1973, Pages 169-176

हाइपरज्यामितीय श्रेणी के रूपान्तरण

बी० एम० अग्रवाल
गणित विभाग, गवर्नमेंट साइंस कालेज, ग्वालियर

[प्राप्त—जनवरी 25, 1973]

सारांश

अन्तरात्मक ग्रापरेटरों की सहायता से हाइपरज्यामितीय श्रेणी के कुछ रूपान्तरण प्राप्त किये गये हैं। सालशुत्ज़ के प्रमेय की एक रोचक दशा भी धन समाकल मानों के लिये निकाली गई है।

Abstract

Transformations of hypergeometric series. *By* B. M. Agrawal, Mathematics Department, Government Science College, Gwalior.

In the persent note some transformations oi hypergeomertic series have been obtained with the help of difference operators. An interesting case of Saal Schutz's theorem for positive integral values has been deduced.

टासकैनों[10] ने अन्तरात्मक ग्रापरेटर $\triangle$ तथा E का उपयोग कतिपय समाकलों को निकालने के लिये किया है। लेखक ने[1] तथा सिंह[8] ने इन ग्रापरेटरों के विभिन्न संयोगों द्वारा कुछ और समाकल प्राप्त किये हैं। लेखक[2] ने इनका उपयोग क्रियात्मक सूत्रों को प्राप्त करने के लिये भी किया है। इन ग्रापरेटरों का प्रयोग कतिपय श्रेणियों[3, 5] के संकलन के लिये भी समान रूप से उपयोगी है।

प्रस्तुत प्रपत्र में इन्हीं ग्रापरेटरों की सहायता से हाइपरज्यामितीय श्रेणी के कुछ रूपान्तरण प्राप्त किये गये हैं। सालशुत्ज़ के प्रमेय की एक रोचक दशा भी निकाली गई है।

1. हम अन्तरात्मक ग्रापरेटरों की परिभाषा निम्नांकित प्रकार से देंगे :—

$$\triangle f(\alpha)=f(\alpha+1)-f(\alpha) \tag{1}$$

$$Ef(\alpha)=f(\alpha+1) \tag{2}$$

$$\triangle^n f(\alpha)=\triangle(\triangle^{n-1}f(\alpha)) \tag{3}$$

(1) और (2) से

$$1+\triangle\equiv E \tag{4}$$

और हम इस मान को n के सभी प्रकार के धन, ऋण, पूर्णांक या भिन्नात्मक मानों के लिये प्रयोग में लावेंगे।

साथ ही मिल्ने-थामसन[7] का

$$\triangle^n u_\alpha v_\alpha=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\triangle^{n-r}u_{\alpha+r}\triangle^r v_\alpha \tag{5}$$

भी उपलब्ध है।

2. $\triangle^n\Gamma a/\Gamma e$ पर विचार करने तथा (1) का उपयोग करने पर

$$(-1)^n\frac{\Gamma a}{\Gamma e}\,{}_2F_1\begin{bmatrix}-n,\ a\\ e\end{bmatrix}=\triangle^n\Gamma a/\Gamma e$$

$$=(-1)^n\frac{\Gamma a}{\Gamma e}\frac{(e-a)_n}{(e)_n} \tag{6}$$

इसी प्रकार $\triangle^n\Gamma a\Gamma b/\Gamma e\Gamma f$ पर विचार करने तथा (5) और (4) का उपयोग करने पर

$$\frac{\Gamma a\Gamma b}{\Gamma e\Gamma f}(-1)^n\,{}_3F_2\begin{bmatrix}-n,\ a,\ b\\ e, f\end{bmatrix}=\triangle^n\Gamma a\Gamma b/\Gamma e\Gamma f$$

$$=(-1)^n\frac{\Gamma a\Gamma b}{\Gamma e\Gamma f}\frac{(e-a)_n}{(e)_n}\,{}_3F_2\begin{bmatrix}-n, f-b,\ a\\ f,\ 1+a-e-n\end{bmatrix} \tag{6A}$$

$$=(-1)^n\frac{\Gamma a\Gamma b}{\Gamma e\Gamma f}\frac{(e-a)_n(f-a)_n}{(e)_n(f)_n}$$

$${}_4F_3\begin{bmatrix}-n,\ a,\ 1+a+b-e-f-n\\ 1+a-e-n,\ 1+a-f-n\end{bmatrix} \tag{6B}$$

प्राप्त होगा। इस विधि का और आगे सम्प्रयोग करने पर

$$(-1)^n\Gamma\begin{bmatrix}a,\ b,\ c\\ e,\ f,\ g\end{bmatrix}{}_4F_3\begin{bmatrix}-n,\ a,\ b,\ c\\ e, f, g\end{bmatrix}=\triangle^n\,\Gamma\begin{bmatrix}a,\ b,\ c\\ e,\ f,\ g\end{bmatrix}$$

$$=A\sum_{s_1=0}^{n}\frac{(-n)_{s_1}(a)_{s_1}(1+a+b-e-f-n)_{s_1}}{s_1!\,(1-e+a-n)_{s_1}(1+a-f-n)_{s_1}}\,{}_3F_2\begin{bmatrix}-s_1,\ g-c,\ b\\ g,\ 1+a+b-e-f-n\end{bmatrix} \tag{7A}$$

$$=A \sum_{s_1=0}^{n} \frac{(-n)_{s1}(a)_{s1}(1+a+b-e-f-n)_{s1}(g-b)_{s1}}{(1-e+a-n)_{s1}(1+a-f-n)_{s1}\ (g)_{s1}\ s_1!}$$

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}-s_1, b, 1+a+b+c-e-f-g-n\\1+a-e-f+b-n, 1+b-g-s_1\end{matrix}\right] \quad (7B)$$

प्राप्त होता है जहाँ $A=(-1)^n\, \Gamma\left[\frac{\Gamma a\Gamma b\Gamma c}{\Gamma e\Gamma f\Gamma c}\right] \frac{(e-a)_n(f-a)_n}{(e)_n(f)_n}$

उपर्युक्त रूपान्तरणों की सहायता से इन फलों का सार्वीकरण किया जा सकता है यदि संकलन को (B) के जैसा रहने दिया जाय और संगत परिवर्तनों के साथ (A) के पिछले फल ${}_3F_2$ को उसमें स्थान दे दिया जाय। इस प्रकार हमें निम्नांकित फल मिलेगा :--

$$(-1)^n\, \Gamma\left[\begin{matrix}a, b, c, d\\e, f, g, h\end{matrix}\right] {}_5F_4\left[\begin{matrix}-n, a, b, c, d\\e, f, g, h\end{matrix}\right] = \triangle^n \left[\begin{matrix}\Gamma a\Gamma b\Gamma c\Gamma d\\\Gamma e\Gamma f\Gamma g\Gamma h\end{matrix}\right]$$

$$=A\,.\sum_{s_1} \frac{(-n)_{s1}(a)_{s1}(1+a+b-e-f-n)_{s1}(g-b)_{s1}}{s_1!\ (1-e+a-n)_{s1}(1-f+a-n)_{s1}(g)_{s1}}$$

$$\sum_{s_2} \frac{(-s_1)_{s_2}(b)_{s_2}(1+a+b-e-f-g+c-n)_{s_1}}{(1+a-e-f+b-n)_{s_2}(1+b-g-s_1)_{s_2} s_2!}$$

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}-s_2, c, h-d\\h, 1+a+b+c-e-f-g-n\end{matrix}\right] \quad (8)$$

विशिष्ट दशायें

(i) यदि $1+a+b-e-f-n=0$ तो हमें $(6B)$ से सालशुत्ज़ का विख्यात प्रमेय

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}-n, a, b,\\e, 1+a+b-e-n\end{matrix}\right] = \frac{(e-a)_n(e-b)_n}{(e)_n(e-a-b)_n} \quad (9)$$

प्राप्त होगा।

(ii) यदि $1+a+b+c-e-f-g-n=0$ तो हमें $(7B)$ से [4, p. 56]

$${}_4F_3\left[\begin{matrix}-n, a, b, c\\e, f, g\end{matrix}\right] = \frac{(e-a)_n(f-a)_n}{(e)_n(f)_n}\ {}_4F_3\left[\begin{matrix}-n, a, g-c, g-b\\1+a-e-n, 1+a-f-n, g\end{matrix}\right]. \quad (10)$$

प्राप्त होगा।

(iii) यदि $1+a+b+c+d-e-f-g-h-n=0$ तो (7) से हमें

$$
{}_5F_4\left[\begin{matrix}-n, a, b, c, d\\ e, f, g, h\end{matrix}\right]=\frac{(e-a)_n(f-a)_n}{(e)_n(f)_n}\sum_r\frac{(-n)_r(a)_r(h+g-c-d)_r(g-b)_r}{(1-e+a-n)_r(1-f+a-n)_r(g)_r\, r!}
$$

$$
{}_4F_3\left[\begin{matrix}-r, b, h-d, h-c\\ h+g-c-d, 1+b-g-r, h\end{matrix}\right] \quad (11)
$$

प्राप्त होगा।

3. इस अनुभाग में हम व्युत्क्रम रूपान्तरण प्राप्त करेंगे। इन फलों की वैधता सन्निहित अनन्त श्रेणी के अभिसरण पर निर्भर करती है।

(5) से हमें

$$
\frac{\Gamma a}{\Gamma e}(-1)^n\frac{1}{(e-a)_n}=\triangle^{-n}\frac{\Gamma a}{\Gamma e+n}=(-1)^n(1-E)^{-n}\frac{\Gamma a}{\Gamma e+n}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(n)_r}{r!}(-1)^n\frac{\Gamma a+r}{\Gamma e+n+r}.
$$

प्राप्त होगा अतः

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix}n, a\\ e+n\end{matrix}\right]=\frac{(e)_n}{(e-a)_n} \qquad Re\,(e-a)>0 \qquad (12)
$$

इसी प्रकार (6) तथा (9) से

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}n, a, b\\ 1+a+b-e, e+n\end{matrix}\right]=\frac{(e)_n(e-a-b)_n}{(e-a)_n(e-b)_n} \qquad (13)
$$

तथा (8) और (11) से हमें

$$
\sum_m\frac{(n)_m(a)_m(b)_m(c)_m}{(e+n)_m(f+n)_m(g)_m}\,{}_4F_3\left[\begin{matrix}-n, a+m, g-c, g-b\\ g+m, 1-e+a-n, 1+a-f-n\end{matrix}\right]
$$

$$
=\frac{(e)_n(f)_n}{(e-a)_n(f-a)_n} \qquad (14)
$$

की प्राप्ति होगी बशर्ते $1+a+b+c-e-f-g-n=0$

हमें निम्नांकित की भी प्राप्ति हो सकती है:

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}-(m+n), a, b\\ e, 1+a+b-e-n\end{matrix}\right]=\frac{(e-a)_n(e-b)_n}{(e)_n(e-a-b)_n}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}-m, a, b\\ 1+a+b-e, e+n\end{matrix}\right]
$$

$$
(m+n)>-1 \qquad (15)
$$

तथा

$$
{}_3F_2\left[\begin{matrix}-n+m, a, b\\ e, 1+a+b-e-n\end{matrix}\right]=\frac{(e-a)_n(e-b)_n}{(e)_n(f)_n}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}m, a, b\\ e+n, 1+a+b-e)\end{matrix}\right],
$$

$$\text{यदि } (m-n\geqslant 0 \qquad (16)$$

4. अब हम कुछ प्रमेयों का वर्णन करेंगे और कतिपय अन्य रूपान्तरण प्राप्त करेंगे। इनकी उपपत्तियाँ सरल हैं अतः उन्हें नहीं दिया जा रहा।

प्रमेय 1.

माना $(1-E)^n f(a)=\sum_r \binom{n}{r} (-E)^r f(a)$

n के समस्त मानों के लिये सत्य है तो

$$\sum_r \frac{(x)_r}{(y)_r}\frac{E^r}{r!} f(a)=\sum_r \frac{(y-x)_r}{(x)_r}\frac{(-1)^r}{r!} \sum_s \frac{E^{r+s}}{s!} f(a)$$

यदि दोनों पक्ष अभिसारी हों।

उद

माना कि $f(a)=\dfrac{\Gamma a_{p+1}}{\Gamma e_p}$ जहाँ e_p से $e_1, e_2, \ldots, e_p$ का बोध होता है, तो

$$.\, F\begin{bmatrix} x,\ a_{p+1} \\ y,\ e_p \end{bmatrix}=\sum_r \frac{(y-x)_r}{(y)_r}\frac{(a_{p+1})_r}{(e_p)_r}\frac{(-1)_r}{r!} F\begin{bmatrix} a_{p+1}+r \\ e_p+r \end{bmatrix} \qquad (17)$$

विशेषतया यदि $p=1$ तो हमें

$${}_3F_2\begin{bmatrix} x,\ a_1,\ a_2 \\ y,\ e_1 \end{bmatrix}=\Gamma\begin{bmatrix} e_1,\ e_1-a_1-a_2 \\ e_1-a_2,\ e_1-a_1 \end{bmatrix}\ {}_3F_2\begin{bmatrix} y-x,\ a_1,\ a_2 \\ y,\ 1-e_1+a_1+a_2 \end{bmatrix}$$

प्राप्त होगा। यदि $x=f+n-1, y=f, a_1=a, a_2=b$ तथा $e_1=e$ तो उपर्युक्त परिणाम स्लेटर द्वारा दिये गये फल [9, 81]

$${}_3F_2\begin{bmatrix} f+n-1,\ a,\ b \\ f,\ e \end{bmatrix}=\Gamma\begin{bmatrix} e,\ e-a-b \\ e-a,\ e-b \end{bmatrix} {}_3F_2\begin{bmatrix} a,\ b,\ 1-n \\ 1+a+b-e, f \end{bmatrix}$$

में परिणत हो जाता है।

प्रमेय 2.

यदि $(1-E)^n f(a)=\sum\binom{n}{r}(-E)^r f(a)$, n के समस्त मानों के लिये

$$\text{तो} \quad \sum_r \frac{(x)_r(y)_r}{(z)_r\, r!} E^r f(a)=\sum_r \frac{(z-x)_r(z-y)_r}{(z)_r\, r!} \sum_s \frac{(-z+x+y)_s}{s!} E^{r+s} f(a)$$

उदाहरण 2. माना कि

$$f(a)=\Gamma a_p/\Gamma e_p.$$

तो इस दशा में हमें

$$F\begin{bmatrix}x, y, a_p\\ z, e_p\end{bmatrix}=\sum_r \frac{(z-x)_r(z-y)_r(a_p)_r}{(z)_r(e_p)_r\, r\,!} F\begin{bmatrix}-z+x+y, a_p+r\\ e_p+r\end{bmatrix} \tag{18}$$

प्राप्त होगा। अब यदि $p=1$ तो $z-x-y=N$ के धन या ऋण संख्या होने के अनुसार (5) या (12) का उपयोग करने पर

$$_3F_2\begin{bmatrix}x, y, a\\ z, e\end{bmatrix}=\frac{(e-a)_N}{(e)_N} F\begin{bmatrix}z-x, z-y, a\\ z, e+N\end{bmatrix}$$

आगे, यदि $p=2$ तो $z-x-y=N$ के धन या ऋण संख्या होने के अनुसार (9) या (12) का उपयोग करते हुए

$$_4F_3\begin{bmatrix}x, y, a, b\\ z, e, 1+a+b-e-N\end{bmatrix}=\frac{(e-a)_N(e-b)_N}{(e)_N(e-a-b)_N}\ {}_3F_2\begin{bmatrix}z-x, z-y, a, b\\ z, e+N, 1-e+a+b\end{bmatrix}$$

यदि हम $x=v+n-1; y=-m+1; z=v$ रखें तथा $e\to a+b+n$ तो हमें स्टेलर का निम्नांकित फल [9, p. 81] प्राप्त होगा :

$$\Gamma\begin{bmatrix}a+m, b+m\\ m, a+b+m\end{bmatrix} {}_3F_2\begin{bmatrix}a, b, v+m-1\\ v, a+b+m\end{bmatrix} n \text{ पद}$$

$$=\Gamma\begin{bmatrix}a+n, b+n\\ n, a+b+n\end{bmatrix} {}_3F_2\begin{bmatrix}a, b, v+n-1\\ v, a+b+n\end{bmatrix} m \text{ पद}$$

प्रमेय 3.

माना कि $E=1+\triangle$

तो
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n\,!} E^n\phi(a, n)=\sum_{n,r}\frac{f(n+r)}{n\,!\, r!} (-1)^r \sum_s \frac{(-r)_s}{s\,!}\ \phi(a+s, n+r)$$

उदाहरण 3.

माना कि $f(n)=\Gamma a_p+n/\Gamma b_{q+n}\cdot t^n$

और $\phi(a, n)=\Gamma a_e/\Gamma\beta_k x^a.$

तो हमें निम्न फल [6] मिलेगा

$$F\begin{bmatrix} a_p, \alpha_e; & xt \\ b_q, \beta_k & \end{bmatrix} = \sum_r \frac{(a_p)_r}{(b_q)_r}(-t)^r F\begin{bmatrix} a_p+r; & t \\ b_q+r & \end{bmatrix} F\begin{bmatrix} -r, \alpha_e; & x \\ \beta_k & \end{bmatrix}.$$

प्रमेय 4.

माना कि $\triangle = E-1$

तो $$\sum_n \frac{f(n)}{n!} \triangle^n \phi(a, n) = \sum_{n,r} \frac{(-1)^n f(n+r)}{n!\; r!} \phi(a+r, n+r).$$

उदाहरण 4.

माना कि $f(n) = \frac{\Gamma a_p+n}{\Gamma b_q+n} z^n$

तथा $\phi(a, n) = \Gamma a/\Gamma e$

तो हमें

$${}_1F_1\begin{bmatrix} a_p, e-a; & -z \\ b_q \quad e & \end{bmatrix} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a_p)_r (a)_r z^r}{(b_q)_r (e)_r r!} F\begin{bmatrix} a_p+r; & -z \\ b_q+r & \end{bmatrix}$$

प्राप्त होगा। विशेषतया

$${}_1F_1\begin{bmatrix} e-a; & -z \\ e & \end{bmatrix} = e^{-z} F\begin{bmatrix} a; & z \\ e & \end{bmatrix}$$

यदि $p=q=0$ और यदि $q=0, p=1$ तो [4, p. 10]

$${}_2F_1\begin{bmatrix} a_1, e-a; & -z \\ e & \end{bmatrix} = (1+z)^{-a} F\begin{bmatrix} a_1, a; & z/1+z \\ e & \end{bmatrix}$$

की प्राप्ति होगी।

उदाहरण 5.

माना कि $f(n) = \frac{\Gamma a_p+n}{\Gamma b_q+n} z^n$

$$f(a, n) = \Gamma\begin{bmatrix} a, b \\ c, 1+a+b-c-n \end{bmatrix}$$

तो $$F\begin{bmatrix} a_p, c-a, c-b; & z \\ b_q, c & \end{bmatrix} = \sum_r \frac{(a_p)_r (a)_r (b)_r z^r}{(b_q)_r (c)_r r!} F\begin{bmatrix} a_p+r, c-a-b; & z \\ b_q+r & \end{bmatrix}$$

विशेषतया यदि $p=q=0$ तो हमें [4, p 2]

$$F\begin{bmatrix} c-a, c-b; z \\ c \end{bmatrix} = (1-z)^{-(c-a-b)} F\begin{bmatrix} a, b; z \\ c \end{bmatrix}$$

प्राप्त होगा।

निर्देश

1. अग्रवाल, बी० एम०। **प्रोसी० कैम्ब्रिज फिला० सोसा०**, 1968, **64**, 99-104
2. वही। **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1967, **10**, 43-50.
3. वही। La Ricerca 1968, **पृष्ठ** 20-24.
4. बेली, डब्लू० एन०। Generalised Hypergeometric Series 1964.
5. जैन, एन० सी०। Rev. Roumaine Math. Pures. Appl. 1970, **15**, 545-48.
6. मनोचा, एच० एल०। La Ricerca, **पृष्ठ** 28-30.
7. मिल्ने-थामसन, एल० एम०। The Calculus of Finite Differences 1933.
8. सिंह, एफ०। **प्रोसी० कैमब्रज फिला० सोसा०**, 1969, **65**, 725-30.
9. स्लेटर, एल० जे०। Generalised Hypergeometric Functions. 1966.
10. टोस्कैनो, एल०। **बुले० यूनि० मैथ० इटली**, 1949, 398-409.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 3, July, 1973, Pages 177-181

आवेश-स्थानान्तरण बैंडों की तीव्रतायें तथा आवेश स्थानान्तरण में दाता बन्ध तरंग फलन का योगदान

जगदीश प्रसाद शर्मा
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—जुलाई 1, 1972]

सारांश

कुछ *s*-ट्राइनाइट्रोबेंजीन से युक्त वलय-प्रतिस्थापित तथा *N*-प्रतिस्थापित ऐनिलीनों के संकरों के आवेश-स्थानान्तरण (*C-T*) बैंडों की तीव्रताओं का सम्बन्ध उनके साम्य-स्थिरांकों से स्थापित किया गया है। संकरों की मूल अवस्था में दाता बन्ध तरंग फलन के योगदान का भी परिगणन किया गया है और यह निष्कर्ष निकाला गया है कि मूल अवस्था पर संकरों में अधिकांशतया बन्धहीन संरचना होती है।

Abstract

The intensities of the charge-transfer bands and the contribution of the dative bond wave function in the charge-transfer complexes. *By* J. P. Sharma, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad.

Intensities of the charge-transfer bands of the complexes of some ring-substituted and *N*-substituted anilines with *s*-trinitrobenzene have been correlated with their equilibrium constants. The contribution of the dative bond wave function to the ground state of the complexes has also been calculated and it is concluded that the complexes possess largely the no-bond structure in the ground state.

पूर्व सूचना में हम[1] दाता के रूप में सात ऐरोमैटीय ऐमीनों तथा ग्राही के रूप में *s*-ट्राइनाइट्रोबेंजीन के बीच होने वाली $\pi-\pi$ आवेश स्थानान्तरण अभिक्रियाओं का उल्लेख कर चुके हैं। उसमें ऐमीनों की दाता शक्तियों का तथा कुछ अन्य ऐरोमैटीय नाइट्रो-यौगिकों की इलेक्ट्रान युयुक्षाओं का तर्कयुक्त परीक्षण किया गया और निकायों के विभिन्न ऊष्मागतिकीय तथा स्पेक्ट्रमीय स्थिरांकों की सूचना दी गई। प्रस्तुत सूचना में आवेश-स्थानान्तरण बन्ध की तीव्रताओं को प्रभावित करने वाले कारकों की विवेचना की गई है और संकरों की मूल अवस्था पर दाता बन्ध तरंग फलन योगदान का परिगणन किया गया है।

प्रयोगात्मक

अभिकर्मक : समस्त ऐरोमैटीय ऐमीन वैश्लेषिक कोटि के थे। इनके परिष्करण एवं परिरक्षण की विधियाँ पहले ही सूचित की जा चुकी हैं।[1] प्रयुक्त *S*-ट्राइनाइट्रोबेंज़ीन 'कार्बनिक विश्लेषण के लिये कार्बनिक ग्रभिकर्मक' कोटि का था (हापकिन्स तथा विलियम्स लिमिटेड, लन्दन) और उपयोग में लाने के पूर्व निर्वात में सुखा लिया गया था। विलायक के रूप में प्रयुक्त साइक्लोहेक्सेन भी वैश्लेषिक कोटि का था।

उपकरण तथा विधि : समस्त स्पेक्ट्रमीय मापन बेकमैन माडेल डी-यू स्पेक्ट्रोमीटर में सिलिका सेलों का उपयोग करते हुये (1 सेमी लम्बा पथ) किये गये। साम्य स्थिरांकों (K) तथा मोलर विलोपन गुणांकों (E_{max}) के परिगणन पूर्ववर्णित[1] बेनेसी-हिल्डेब्रांड समीकरण [12] की संशोधित स्कॉट विधि [11] द्वारा किये गये। प्रस्तुत परिगणनों के लिये पूर्ववर्णित $-\Delta H$ तथा $h\nu$ के मानों को, जो क्रमशः किलोकैलोरी तथा सेमी०$^{-1}$ में व्यक्त किये गये थे, इलेक्ट्रान वोल्ट इकाइयों में परिणत किया गया। प्राप्त परिणाम सारणी 1 में दिये गये हैं।

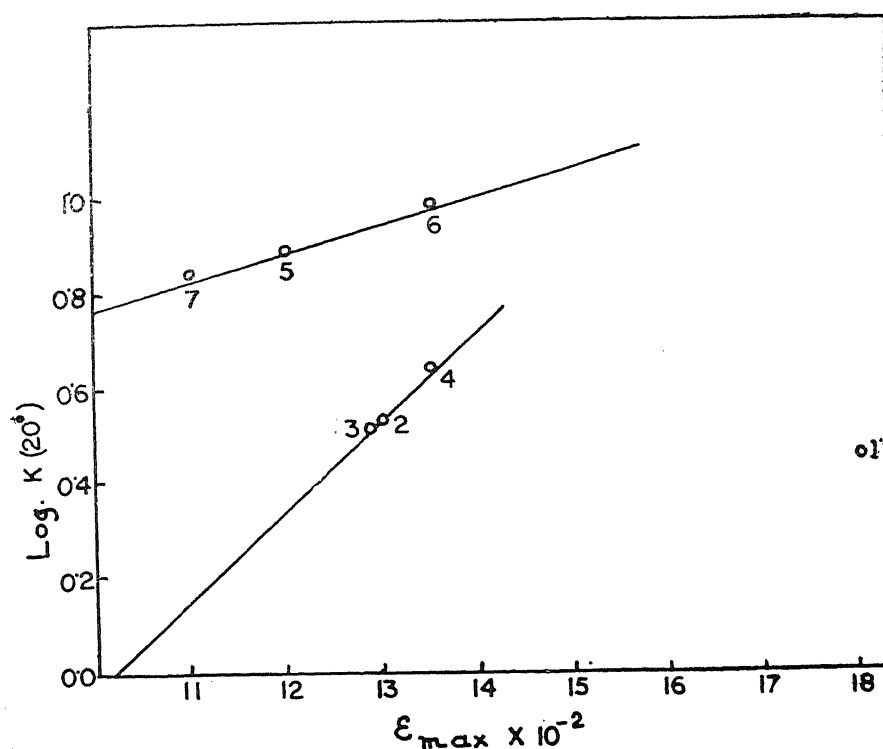
सारणी 1

साइक्लोहेक्सेन में ऐरोमैटिक ऐमीन तथा *s*-ट्राइनाइट्रोबेंज़ीन संकरों में दाता बन्ध तरंग फलन का योगदान

दाता	$-\Delta H$, e. v.	$h\nu$, e. v	b^2/a^2
ऐनिलीन	0·07877	3·178	0·02478
o-टॉल्विडीन	0·08288	3·053	0·02715
m-टॉल्विडीन	0·08154	3·061	0·02665
p-टॉल्विडीन	0·09535	3·001	0·03177
N-मेथिल ऐनिलीन	0·10880	2·849	0·03819
N-डाइमेथिल ऐनिलीन	0·13090	2·667	0·04910
N-डाइएथिल ऐनिलीन	0·1046	2·500	0·04185

विवेचना

***C-T* बैंडों की तीव्रतायें**—संकरों की श्रेणी में *C-T* बैंड तीव्रताओं की प्रवृत्ति काफी परिवर्तनशील होती है अर्थात् बेंजीन कई ग्राहियों के साथ *C-T* बैंड प्रदान करता है जिनकी तीव्रतायें अधिकतम अवशोषण के तरंग दैर्ध्यों के समानुपाती होती हैं[2]। लेकिन सामान्यतया *C-T* बैंडों की तीव्रतायें या तो अधिकतम अवशोषण के तरंग दैर्ध्य या संकरों के साम्य स्थिरांक की व्युत्क्रम

समानुपाती होती हैं[3]। सिद्धान्त रूप में ऐसी आशा नहीं की जाती क्योंकि मध्यम तीव्रता वाले संकरों के $C-T$ बैंडों की तीव्रताओं को अदाता-बन्धित तथा दाता अवस्थाओं के बीच के मिश्रण के अनुपाती होना चाहिए अर्थात् यदि संकरों के K मान बढ़ें तो तीव्रता भी बढ़नी चाहिए। इस तथ्य को ध्यान में रखते हुए संकरों के K मानों को C-T बैंडों की तीव्रताओं से सहसम्बन्धित करने का प्रयास किया गया है। चित्र 1 में साइक्लोहेक्सेन में संकरों के लघु K मानों को E_{max} के प्रति आलेखित किया गया है। इससे उपर्युक्त आशा की पूर्ति हो जाती है[4] यदि दाताओं की संरचनात्मक विशिष्टतायें एक-जैसी हों। यह निष्कर्ष इस तथ्य पर आधारित है कि N-मेथिल ऐनिलीन, NN-डाइमेथिल ऐनिलीन तथा NN-डाइएथिल ऐनिलीन (सभी N-प्रतिस्थापित) के बिन्दु एक ही सरल रेखा पर बनते हैं जबकि आइसोमरीय टॉल्विडीनों के संगत बिन्दु दूसरी रेखा पर बनते हैं। ऐनिलीन का बिन्दु इन दोनों रेखाओं से सर्वथा बाहर आता है। ऐसे अन्तर प्रायः ही सूचित होते रहे हैं। मुलिकेन तथा ओर्गेल[5] ने ऐसे अपवादों के लिए स्पर्श C-T अवशोषण की कल्पना की है। जब दाता तथा ग्राही दोनों ही उदासीन ऐरोमैटीय अणु होते हैं तो स्पर्श आवेश-स्थानान्तरण अवशोषण विरले ही होता है, यह मानते हुये मुरेल[6] का सुझाव अत्यन्त युक्तियुक्त प्रतीत होता है।

चित्र 1

लघु $K(20°)$ तथा E_{max} के मध्य सम्बन्ध

विभिन्न संकरों के K मान (20°) ली० मोल$^{-1}$ इस प्रकार थे:

1. ऐनिलीन 2·97, 2· o-टॉल्विडीन 3·41, 3·m टॉल्विडीन 3·36,4. p टॉल्विडीन 4·44, 5. N-मेथिलऐनिलीन 7·84, 6. डाइमेथिल ऐनिलीन 9·85 तथा 7. NN-डाइएथिल ऐनिलीन 7·00.

C-T संक्रमण का व्यक्तिगत अवयव अणुओं के संक्रमण से मिश्रण होता है और इस प्रकार अवशोषण की अतिरिक्त तीव्रता की व्याया हो जाती है। इससे ऐनिलीन संकरों के उच्च C-T अधिकतम मान की व्याख्या हो जाती है।

दाता बन्ध तरंग फलन का योगदान

अदाता-बन्ध तथा दाता-बन्ध अवस्थाओं के संस्पंदन से आवेश-स्थानान्तरण संकर की मूल अवस्था स्थापित हो जाती है [4,7] जिसे

$$\psi_N = a\psi_0(DA) + b\psi_1(D^+A^-)$$

जहाँ $a \gg b$

द्वारा व्यक्त किया जाता है।

संगत उत्तेजित अवस्था निम्न प्रकार होगी:

$$\psi_E = a^*\psi_1\ (D^+A^-) - b^*\psi_0(DA)$$

जहाँ $a^* \gg b^*$ तथा $a \approx a^*,\ b \approx b^*$

दाता बन्ध तरंग फलन का योगदान b^2/a^2 अनुपात द्वारा सूचित होता है जिसका निर्धारण सन्निकटत:

$$b^2/a^2 = -\triangle H/h\nu$$

द्वारा किया जा सकता है जहाँ $-\triangle H$ संकर निर्माण की पूर्ण ऊष्मा है और $h\nu$ आवेश-स्थानान्तरण बैंड की ऊर्जा का सूचक है।

इस सम्बन्ध का उपयोग इससे भी पूर्व किया जा चुका है[8]। सारणी 1 में b^2/a^2 के परि-गणित मान दिये हुये हैं। इससे यह स्पष्ट है कि अणुओं की दाता शक्ति बढ़ाने के साथ (संकर निर्माण के लिये इसे साम्य स्थिरांक K द्वारा व्यंजित किया गया है, देखें चित्र 1) इसका अपवाद N—N-डाइ-एथिल ऐनिलीन संकर है। इसमें N-मेथिल ऐनिलीन की तुलना में दाता बन्ध का अधिक योगदान इसकी निम्नतर C-T बैंड ऊर्जा का होना है। यह ऊर्जा दाता के वियोजन विभव पर निर्भर करती है[9] जबकि $-\triangle H$ तथा K मान स्टेरिक कारकों द्वारा प्रभावित होते हैं। NN-डाइएथिल ऐलीन में वृहत डाइएथिल समूह के होने से ग्राही अणु पास आने में अवरोध होता है[10] जिसके कारण संकर के $-\triangle H$ तथा K मान घट जाते हैं (NN-डाइएथिल ऐनिलीन तथा N-मेथिल ऐनिलीन संकरों के K मान क्रमश: 7·00 तथा 7·84 हैं)। फिर भी b^2/a^2 के लघु मान यह प्रदर्शित करते हैं कि मूल अवस्था में संकरों में कोई बन्ध नहीं होता ($b^2/a=0$ का अर्थ 100% बन्धहीनता तथा $b^2/a^2=1$ का अर्थ होता है दाता बन्ध सहित संरचना)।

निर्देश

1. शर्मा, जे० पी० । **जर्न० फिजि० केमि०**, 1972, **249**, 408
2. मकानेल, एच०, हैम, जे० एस० तथा प्लैट, जे० आर० । **जर्न० केमि० फिजि०**, 1953, **21**, 66
3. ब्रीग्लेब, जी० तथा जेकाला, जे० । Angew Chem, 1960, **72**, 401
4. मुलिकेन, आर० एस० । **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1950, **72**, 600, 4493; 1952, **74**, 811
5. ओर्गेल, एल० ई० तथा मुलिकेन, आर० एस० । **वही**, 1957, **79**, 4839
6. मुरेल, जे० एन० । **वही**, 1959, **81**, 5037
7. मुलिकेन, आर० एस० । **जर्न० फिजि० केमि०**, 1952, **56**, 801
8. केटेलार, जे० ए० ए० । **जर्न० फिजि० रेडियम**, 1954, **15**, 197
9. ब्रीग्लेब, जी० तथा जेकाला, जे० । **जर्न० फिजि० केमि०**, 1960, **24**, 37
10. क्लार्क, जे० तथा पेरिन, डी० डी० । **क्वार्ट० रिव्यू**, 1964, **18**, 295
11. स्काट, आर० एल० । Rec. Trav. Chim., 1956, **75**, 787
12. बेनेसी, एच० ए० तथा हिलेब्रांड, जे० एच० । **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1949, **71**, 2703.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 3, July 1973, Pages 183-185

हिप्यूरिक अम्ल के सूक्ष्म निश्चयन के लिये ग्लाइअॉक्सैलीन का अनुमापक के रूप में प्रयोग

अरुण कुमार सक्सेना
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—अगस्त 10, 1972]

सारांश

हिप्यूरिक अम्ल की सूक्ष्म मात्राओं का निश्चयन ग्लाइअॉक्सैलीन नामक एक नवीन अनुमापक का व्यवहार करते हुये ब्रोमोक्रेसाल परपुल को सूचक के रूप में प्रयुक्त करते हुये किया गया। यह निश्चयन हिप्यूरिक अम्ल में 0·717—0·090 मिग्रा० के परिसर में किया गया। इसमें अधिकतम त्रुटि $\pm$0·008 मिग्रा० की थी।

Abstract

Use of glyoxaline as a new titrant for the microdetermination of hippuric acid. *By* A. K. Saxena, Chemisty Department, University of Allahabad.

Hippuric acid has been determined in micro-quantities with a new titrant, glyoxaline solution, using bromocresol purple as an indicator. Estimations have been carried out in the range of 0·717—0·090 mg. with maximum error of $\pm$0·008 mg.

पूर्ववर्ती सूचनाओं[1] में फ्यूमैरिक अम्ल के सूक्ष्म निश्चयन के लिये ग्लाइअॉक्सैलीन नामक नवीन अनुमापक का उपयोग किया गया था। प्रस्तुत शोधपत्र में हिप्यूरिक अम्ल के निश्चयन की ऐसी ही विधि का प्रयोग हुआ है।

प्रयोगात्मक

प्रयुक्त अभिकर्मक : हिप्यूरिक अम्ल, ग्लाइअॉक्सैलीन तथा ब्रोमोक्रेसाल परपुल। ये सभी बी० डी० एच० कोटि के थे।

हिप्यूरिक अम्ल का संग्रह विलयन जल में बनाकर मानक विधि द्वारा मानकित[2] किया गया। विलयनों को वांछित सान्द्रता तक तनु कर लिया गया। अब इस अम्ल में से ज्ञात आयतन लेकर उसमें आसुत जल डालकर आयतन को 20 मिली० के लगभग बना लिया गया। इसमें ब्रोमोक्रेसाल परपुल सूचक (0·01%) की एक या दो बूदें डाली गईं। विलयन पीले रंग का था। इसे मानक ग्लाइआक्सैलीन विलयन से तब तक अनुमापित किया गया जब तक पीला रंग पूर्णतया दूर होकर हल्का नीललोहित रंग न आ जाय। यह अन्तिम बिन्दु का सूचक है।

सारणी 1

हिप्यूरिक अम्ल का सूक्ष्म निश्चयन

क्रमांक	विलयन का आयतन, मिली०		हिप्यूरिक अम्ल की मात्रा (मि० ग्रा०)		
	हिप्यूरिक अम्ल	प्रयुक्त ग्लाइआक्सैलीन	प्राप्त	सैद्धान्तिक मान	त्रुटि
1.	4·00	4·00	0·717	0·717	0·000
		4·04	0·724		0·000
2.	2·00	1·98	0·366	0·358	0·008
		2·00	0·358		0·000
3.	1·00	1·00	0·179	0·179	0·000
		0·98	0·186		0·007
4	0·50	0·50	0·090	0·09(	0·000
		0·50	0·090		0·000

इस अम्ल का निश्चयन 0·717—0·090 मिग्रा० के परास में किया गया। इनसे अत्यन्त सही तथा एक ही प्रकार के परिणाम प्राप्त हुये।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० मनहरण नाथ श्रीवास्तव का आभारी है जिन्होंने उचित मार्ग दर्शन किया।

निर्देश

1. सक्सेना, ए० के० । — **केमी अनालातीक (प्रकाशनाधीन)**
2. (i) जोदीदी, एस० एल० । — **जर्म० अमे० केमि० सोसा०**, 1926, **48**, 751.

   (ii) दास, एम० एन० तथा पलित, एस० आर० । — **जर्न० इण्डियन केमि० सोसा०**, 1954, **31**, 34.

   (iii) सक्सेना, ए० के० । — **केमी अनालातीक (प्रकाशनाधीन)**

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 3, July, 1973, Pages 187-194

α-मरकैप्टो प्रोपियानिक अम्ल का पोलैरोग्राफीय अध्ययन

सतीश कुमार श्रीवास्तव तथा सत्य प्रकाश
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—नवम्बर 25, 1972]

सारांश

α-मरकैप्टो प्रोपियानिक अम्ल का पोलैरोग्राफीय अध्ययन अमोनिया प्रतिरोधक (पी-एच 9·1), ऐसीटेट प्रतिरोधक (पी-एच 8·3), ब्रिटन राबिन्सन प्रतिरोधक (पी-एच 2—14) और सोडियम हाइड्राक्साइड विलयन (पी-एच 13·7) में किया गया। प्रत्येक माध्यम में एक सुस्पष्ट धनाग्रीय तरंग प्राप्त हुई। गणना द्वारा सल्फिड्रिल समूह का वियोजन स्थिरांक 10·4 प्राप्त हुआ। पी-एच 4·55 और 9·1 के बीच विसरण धारा स्थिरांक का मान लगभग स्थिर ($1{\cdot}74 \pm 0{\cdot}2 \mu A$) होने के कारण इस पी-एच परिसर में α-मरकैप्टो प्रोपियानिक अम्ल का अनुमापन किया जा सकता है।

Abstract

Polarographic study of α-mercapto-propionic acid. *By* S. C. Srivastava and Satya Prakash, Chemistry Department, Allahabad University.

α-*MPA* gives a single well defined anodic wave in ammonia buffer (pH 9.1), acetate buffer (*pH* 4·8), Britton Robinson buffer (*pH* 2—14) and sodium hydroxide solution (*pH* 13·7). A dissociation constant (*pK*) of the sulphydryl group has been determined to be 10·4. The polarographic estimation of α-mercapto propionic acid has been suggested between *pH* values 4·55 to 9·1, where $I = 1{\cdot}74 \pm 0{\cdot}2 \mu A$.

α-मरकैप्टो प्रोपियानिक अम्ल (जिसे हम *MPA* द्वारा व्यक्त करेंगे) का प्रयोग चिकित्सा[2], औषधि विज्ञान[1-5] तथा जीव विज्ञान में बहुतायत से हुआ है। इसे विश्लेषण रसायन में भी अभिकर्मक के रूप में प्रयुक्त किया गया है[6-10]। परन्तु इसके बारे में भारात्मक कार्य बहुत कम हुआ है। अतः α-मरकैप्टो प्रोपियानिक अम्ल के पोलैरोग्राफीय अध्ययन से थायोल और डाइसल्फाइड के आक्सीकरण की संशयात्मक

क्रियाविधि पर और धातु-सल्फर बंध के सम्बन्ध में प्रकाश पड़ने की सम्भावना के फलस्वरूप प्रस्तुत शोध कार्य प्रारम्भ किया गया।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन में बिन्दुपाती पारद विद्युदग्र (*DME*) पर α-मरकैप्टो प्रोपियानिक अम्ल के पोलैरोग्राफीय आक्सीकरण के परिणामों का वर्णन है। *MPA* का अध्ययन विभिन्न सान्द्रताओं और विभिन्न पी-एच मानों पर जलीय माध्यम में किया गया। *MPA* के पोलैरोग्राफीय अनुमापन के लिये उचित दशाओं का उल्लेख किया गया है और *MPA* के सल्फिड्रिल मूलक के लिये विघटन स्थिरांक की गणना की गयी है।

उपकरण: समस्त पोलैरोग्राफीय अध्ययन के लिये स्वतः रिकॉर्डिंग इलेक्ट्रो-कीमोग्राफ टाइप ई (लीड्स नार्थ्रप) का प्रयोग किया गया। सभी पोलैरोग्राम प्रथम डैम्पिग स्थिति में रिकार्ड किये गये। परिणामों की पुष्टि कोल्थाफ और लिगेन[11] के परिपथ द्वारा भी की गयी। सभी विभव ह्यूम और हैरिस[12] के संतृप्त कैलोमल विद्युदग्र की तुलना में मापे गये। पी-एच नापने के लिये लीड्स और नार्थ्रप के कांच विद्युदग्र वाले पी-एच-मापी का उपयोग किया गया। सेतु प्रतिरोध नापने के लिये यमाटो अविरल-तामापी टाइप *yp*—60 को प्रयोग में लाया गया। प्रतिरोध 200—250 ओह्म के बीच होने के कारण कोई *iR* संशोधन नहीं किया गया।

बिन्दुपाती पारद विद्युदग्र की विशेषतायें निम्नांकित **थीं:**

$m = 2{\cdot}089$ मि०ग्रा०/से० $t = 3{\cdot}60$ से०

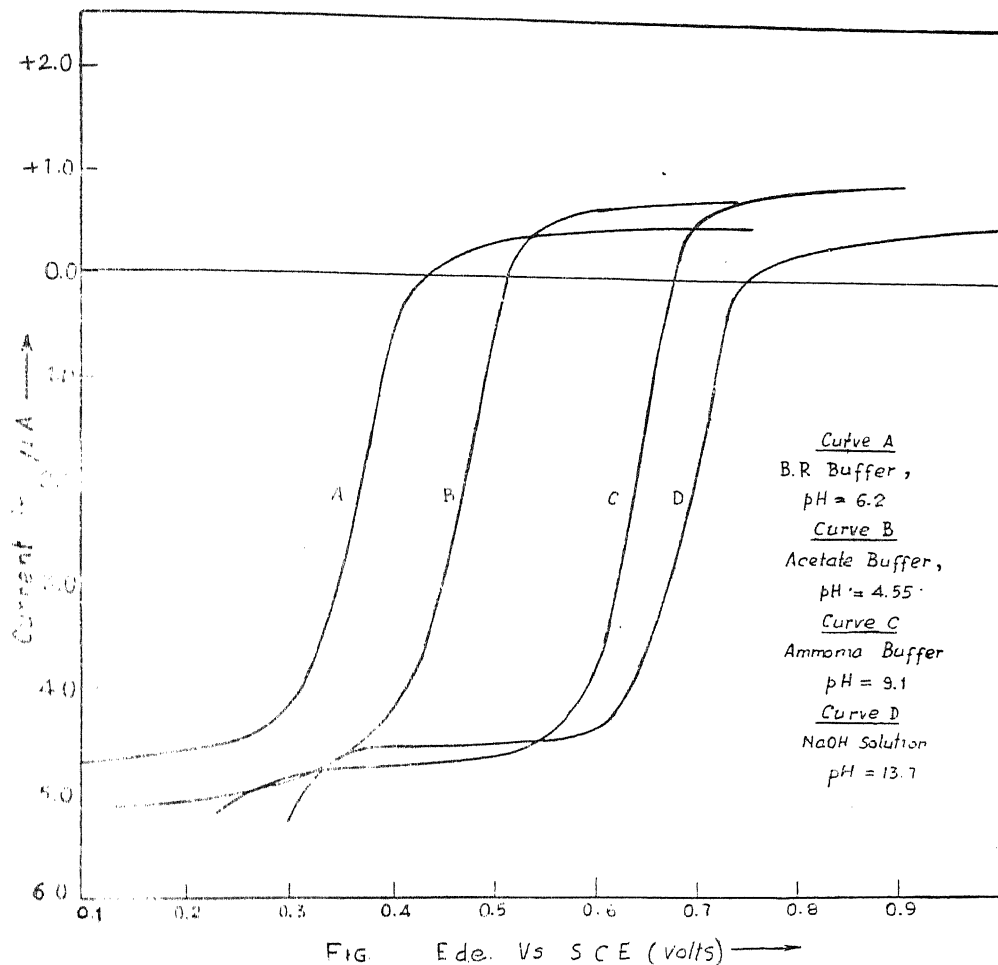
$m^{2/3}t^{1/6} = 2{\cdot}023$ मि०ग्रा०$^{2/3}$ से०$^{-1/2}$

पारद स्तम्भ की ऊँचाई $= 36{\cdot}4$ से०मी०।

अभिकर्मक: प्रयुक्त α-मरकैप्टो प्रोपियानिक अम्ल (फ्लूका, स्विटजरलैंड) 99% शुद्धता का था। इसके विलयनों को आयोडोमिति द्वारा परिमापित किया गया और केवल ताजे बनाये गये विलयन प्रयुक्त किये गये। अन्य सभी अभिकर्मक वैश्लेषिक कोटि के थे। विलयन बनाने के लिये सदैव दोबार आसवित जल का प्रयोग किया गया। सभी मापन वायुरहित माध्यम में किये गये। सेल विलयन से आक्सीजन हटाने के लिये विलयन में शुद्ध नाइट्रोजन की धारा प्रवाहित की गयी। मापन के समय भी सेल विलयन के ऊपर नाइट्रोजन का वातावरण रखा गया। सभी मापन $30 \pm 0{\cdot}1°C$ पर किये गये।

विवेचना

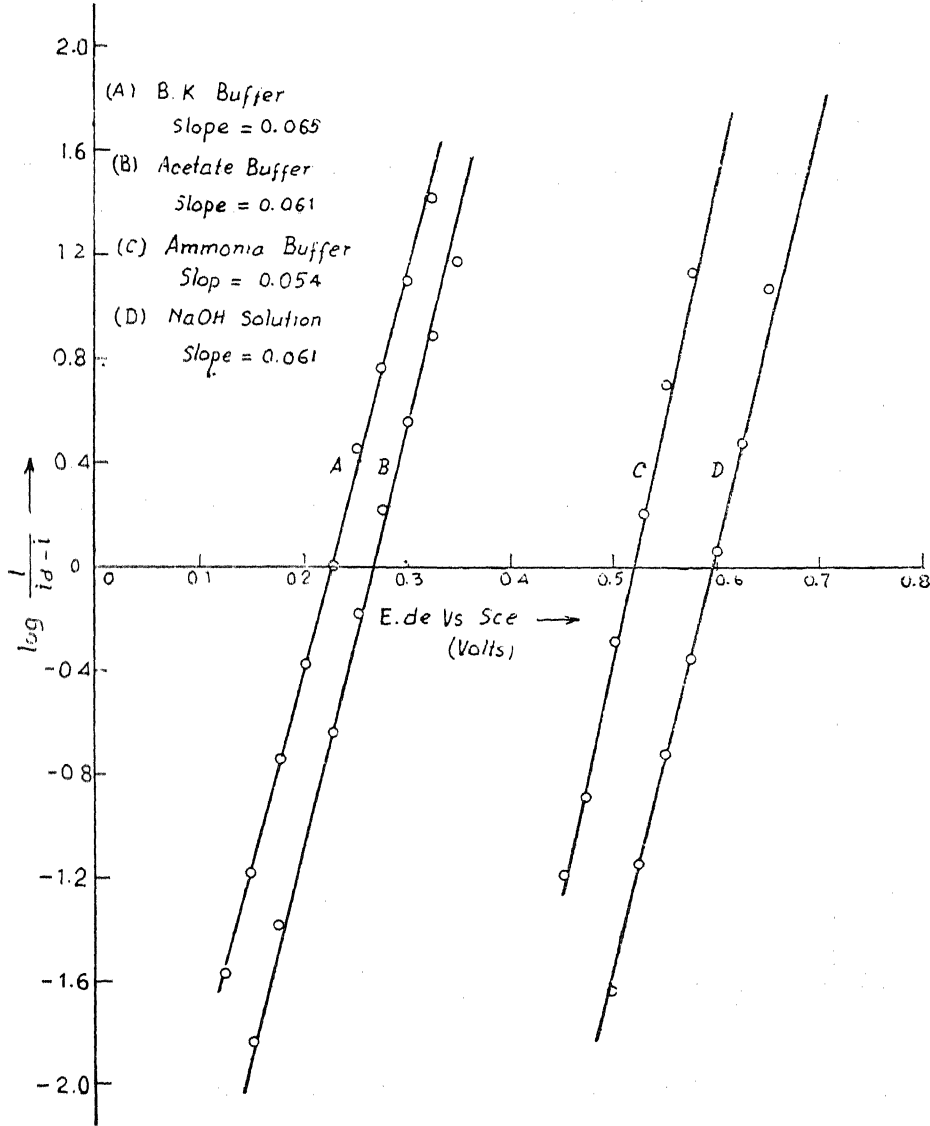
α-मरकैप्टो अम्ल के भिन्न-भिन्न सान्द्रणों पर ब्रिटन-राबिन्सन प्रतिरोधक, ऐसीटेट प्रतिरोधक, अमोनिया प्रतिरोधक और सोडियम हाइड्राक्साइड विलयन के जलीय माध्यमों में पोलैरोग्राम लिये गये।

2·0 से 13·7 पी-एच तक सुस्पष्ट अकेली धनाग्रीय तरंगें प्राप्त हुईं। इन तरंगों की विशेषतायें सारिणी 1 में प्रदर्शित हैं। चित्र 1 में प्रत्येक प्रतिरोधक की एक प्रतिनिधि तरंग दर्शायी गयी है।

चित्र 1. α-मरकैप्टो प्रोपियानिक अम्ल के कुछ धारा वक्र—(*A*) ब्रिटन-राबिंसन प्रतिरोधक पी-एच, 6·2 (*B*) ऐसीटेट प्रतिरोधक पी-एच, 4·55 (*C*) अमोनिया प्रतिरोधक, पी-एच 9·1 और (*D*) सोडियम हाइड्रॉक्साइड विलयन पी-एच 13·7.

जैसा कि सारिणी 1 से स्पष्ट है पी-एच 4·6 और 9·1 के बीच विसरण धारा का मान लगभग स्थिर है। पी-एच 4·6 से कम होने पर धारा का मान बढ़ जाता है और 9·1 से अधिक होने पर धारा का मान घट जाता है। पी-एच 4·6 और 9·1 के बीच विसरण धारा स्थिरांक, I, का मान भी स्थिर पाया गया।

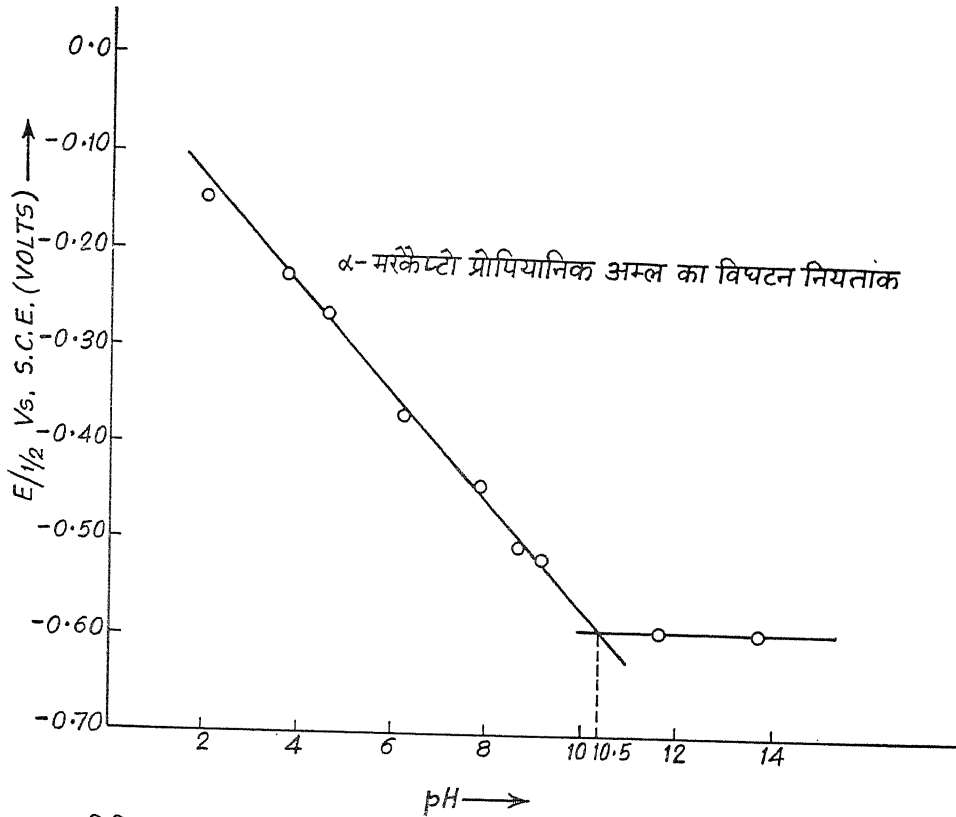
सारिणी 1

पी-एच	α-MPA की सान्द्रता mM में	$E_{1/2}$, वोल्ट में (SCE के प्रति)	id, μA में	$I = \frac{id}{cm^{2/3}t^{1/6}}$
2·0	1·236	0·145	4·85	1·939
2·0	1·483	0·144	5·75	1·916
2·0	0·989	0·145	3·90	1·948
3·7	1·236	0·225	4·75	1·900
3·7	1·483	0·225	4·42	1·933
3·7	0·989	0·220	4·80	1·874
4·5	0·989	0·260	3·41	1·704
4·5	1·236	0·265	4·15	1·660
4·5	1·483	0·265	5·05	1·663
6·2	1·236	0·370	3·75	1·770
6·2	1·483	0·370	5·32	1·774
6·2	0·989	0·370	3·50	1·750
7·8	1·236	0·445	4·32	1·730
7·8	1·483	0·435	5 10	1·700
7·8	0·989	0·445	3·52	1·762
8·7	1·236	0·505	4·50	1·800
8·7	0·989	0·510	3·62	1·811
8·7	1·483	0·517	5·45	1·817
9·1	0·989	0·520	3·45	1·724
9·1	1·236	0·520	4·25	1·700
9·1	1·483	0·515	5·25	1·750
11·6	1·236	0·595	3·92	1·724
11·6	1·483	0·595	4·70	1·700
11·6	0·989	0·595	3·10	1·750
13·7	1·236	0·595	3·75	1·500
13·7	1·483	0·595	4·52	1·508
13·7	0·989	0·595	3·00	1·499

जब बिन्दुपाती पारद विद्युदग्र के विभव (Ede) को $\log \frac{i}{id-i}$ के विरुद्ध रेखांकित किया गया तो एक सरल रेखा प्राप्त हुई। इन रेखाओं के प्रतिनिधि रेखांकन चित्र 2 में दर्शाये गये हैं। इन रेखाओं के व्युत्क्रम ढाल का मान 0·054 से 0·065 के बीच में है। इनसे यह स्पष्ट हो जाता है कि

चित्र 2. $\log \frac{i}{id-i}$ और Ede के वक्र: (A) ब्रिटन-राबिन्सन प्रतिरोधक (B) ऐसीटेट प्रतिरोधक (C) अमोनिया प्रतिरोधक तथा (D) सोडियम हाइड्राक्साइड विलयन माध्यमों में।

विद्युदग्र पर होने वाली क्रिया व्युत्क्रमणीय आक्सीकरण क्रिया है जिसमें एक इलेक्ट्रान का परिवर्तन होता है। उपर्युक्त रेखांकनों से अर्द्धतरंग विभव $E\frac{1}{2}$ के जो मान प्राप्त हुए वे धारा विभव रेखांकन द्वारा प्राप्त $E\frac{1}{2}$ के मानों के बिलकुल तुल्य थे। MPA का सान्द्रण बदलने पर पर $E\frac{1}{2}$ पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता परन्तु पी-एच बढ़ाने पर उसका मान अधिक ऋणात्मक हो जाता है। विसरण धारा का मान MPA के सान्द्रण के समानुपाती पाया गया।

$E\frac{1}{2}$--pH **वक्र**

जब धनाग्रीय तरंगों के अर्धतरंग विभव को माध्यम के पी-एच के साथ रेखांकित किया गया तो दो सरल रेखायें प्राप्त हुईं (चित्र 3), जिनका कटान बिन्दु पी-एच 10·4 पर था। अर्धतरंग

चित्र 3. विभिन्न प्रतिरोधकों में $E\frac{1}{2}$—पी-एच वक्र। α-मरकैप्टो प्रोपियानिक अम्ल की सान्द्रता $1{\cdot}236 \times 10^{-3}$ M.

विभव ($E\frac{1}{2}$) का मान इस पी-एच (10·4) पर बढ़ता गया जहां इसका अधिकतम मान —0·595 प्राप्त हुआ। इसके बाद पी-एच बढाने पर इसके मान में कोई परिर्वतन नहीं हुआ। पी-एच 13·7

तक इसका मान $-0{\cdot}595$ पर स्थिर रहा आया। इस प्रकार α-मरकैप्टो प्रोपियानिक अम्ल के सल्फिड्रिल समूह के वियोजन स्थिरांक का मान 10·4 प्राप्त हुआ। यह मान अन्य सल्फिड्रिल यौगिकों के लिये निकाले गये मानों (थायोमैलिक अम्ल[13] ($pk{=}10{\cdot}54$), थायोसैलिसिलिक अम्ल[14] ($pk{=}9{\cdot}52$) थायोवेनाल[15] ($pk{=}9{\cdot}30$), अवकृत ग्लूटाथायोन[16] ($pk{=}9{\cdot}85$) तथा सिस्टीन[17] ($pk{=}8{\cdot}40$) के समान ही है।

$E_{\frac{1}{2}}-pH$ वक्र का ढाल प्रति इकाई पी-एच वृद्धि के लिये 0·056 वोल्ट था, जिससे ज्ञात होता है कि 2·0 से 10·4 पी-एच तक विद्युदग्र अभिक्रिया में केवल एक हाइड्रोजन आयन ही भाग लेता है। पी-एच का मान 10·4 से अधिक होने पर कोई विस्थापनीय हाइड्रोजन नहीं रह जाता है जिससे हाइड्रोजन आयन की सान्द्रता में परिवर्तन करने से पी-एच बढने पर भी $E_{\frac{1}{2}}$ में कोई परिर्वतन नहीं होता। $E_{\frac{1}{2}}-pH$ वक्र को 10·4 pH तक निम्न समीकरण से प्रगट किया जा सकता है :

$$-E_{\frac{1}{2}}=0{\cdot}03+0{\cdot}056\,pH \qquad (1)$$

α-MPA का अनुमापन

अध्ययन किये गये सभी माध्यमों में मरकैप्टो प्रोपियानिक अम्ल के विसरण धारा स्थिरांक का मान लगभग स्थिर था (सारिणी 1) अतएव इन माध्यमों में मरकैप्टो प्रोपियानिक अम्ल को सफलता-पूर्वक अनुमापित किया जा सकता है। पी-एच 4·55 और 9·1 के बीच में I का मान $1{\cdot}74\pm0{\cdot}2\mu A$ था अतएव α-MPA के अनुमापन के लिये पी-एच और प्रतिरोधक के लिये पर्याप्त परिसर प्राप्त हो जाता है। अन्य प्रतिरोधकों की तुलना में अमोनिया तथा ऐसीटेट प्रतिरोधक में प्राप्त परिणाम सर्वोतम थे। इन प्रतिरोधकों में तरंगें सुस्पष्ट थीं। विसरण धारा स्थिरांक का मान ऐसीटेट प्रतिरोधक में $1{\cdot}68\pm0{\cdot}2$ तथा अमोनिया प्रतिरोधक में $1{\cdot}70\pm0{\cdot}5$ था। α-MPA की सान्द्रता बदलने पर तरंग में कोई विचलन नहीं आता, इसलिये विसरण धारा किसी भी समुचित विभव पर मापी जा सकती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण (स० कु० श्री० और स० प्र०) वैज्ञानिक एवं औद्योगिक अनुसंधान परिषद, नई दिल्ली एवं राज्य वैज्ञानिक तथा औद्योगिक अनुसंधान परिषद, उत्तर प्रदेश लखनऊ के आर्थिक सहायता प्रदान करने के हेतु आभारी हैं।

निर्देश

1. हिरोशी, ओ० कुजोनो। **कुमामोशो मेडि० जर्न०**, 1956, **9**, 1-7
2. सिचिरो यमाजाकी। **चिरयो**, 1954, **36**, 696-70
3. माजिस्तेती, एम०। **अति० सोसा० लोम्बाडी०, साई० मेड० इ० बाइलो०**, 1955, **10**, 619-22

4. श्वेस्तर, जी०, डेशुश, एम० तथा ग्रास, एफ०। **क्रांग एसो० फेंक एनन्सिमेंन्ट साइ० ट्यूनिस,** 1951, **ट्यूनिक मेड०**, 1951, **39**, 838-51

5. यामाजाकी, सिचरो। **फुकोबा, एक्टा मेड०**, 1954, **45**, 234-40

6. हेनरी, ए०, एडना, एम० तथा मिचेल, एच० जू०। **जर्न० लैब० किलन० मेड०**, 1954, **45**, 431-40

7. वलाशो, डब्लू०, राबर्ट, ए० जू० तथा राबर्ट, एल० मोरी। **सी० ए० पेटेन्ट यू० एस०**, 1957, **2**, 796, 424 (**जून** 18)

8. बुनकिची, याकोवा। **ओसाका डायागाकु इगाकू जेशी**, 1958, **10**, 7-13

9. यूनियन फैंकायस कार्मशियेविल एट इन-डस्ट्रली फ्र०। 1953, **1**, 036, 117, **सितम्बर** 3

10. श्वार्जकोफ्त, एन०। **पेटेन्ट जर्म०** 1957 **958**, 501 **फरवरी** 21

11. कोलथाफ, आई० एम० तथा लिंगेन, जे० जे०। Polarography (**इंटरसाइंस पब्लिशर्स इंक न्यूयार्क**), 1952, **पृष्ठ** 300

12. ह्यूम डी० एन० तथा हैरिस, एच० ई०। **इन्ड० एन्जी० केम० एनाल एड०**, 1943, **15**, 465

13. कपूर, आर० सी०, अग्रवाल, ओ० पी० तथा सेठ, टी० डी०। **कनैडियन जर्न० केमि०**, 1961, **39**, 2236

14. कुमार, ए० एन० निगम, एच० एल० तथा सेठ, टी० डी०। **जर्न० पोलेरोग्रा० सोसा०**, 1966, **13**, 3

15. निगम, एच० एल०, नायर, पी० सी०, तथा पांडेय, के० बी०। **जर्न० पोलेरोग्रा० सोसा०**, 1968, **14**, 141

16. ताइबी, आई० कोड्डी एस०। **प्रोसी० आफ फर्स्ट इन्टरनेशनल पोलेरोग्राफिक कांग्रेस, प्राग**, 1951

17. ग्रूब्नर, ओ०। **केम लिस्टी०**, 1953, **47**, 1133

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 3, July, 1973, Page 195-198

प्याज-कन्द के जड़वर्द्धन पर विभिन्न आयनों के अवशोषण का प्रभाव-भाग 2

श्याम सुन्दर पुरोहित तथा सुरेश चन्द्र अमेटा
राजकीय महाविद्यालय, नाथद्वारा

[प्राप्त—8 सितम्बर, 1972]

सारांश

प्याज की जड़ों पर K^+, Na^+, Br^-, NO_3^-, $SO_4^{=}$ एवं CNS^- आयनों के प्रभाव का अध्ययन किया गया। इसके लिए धनायनों तथा भिन्न-भिन्न ऋणायनों के संयोजी लवणों के 0·01 प्रतिशत विलयनों का उपयोग किया गया। प्रस्तुत शोध-पत्र में अनुकूलतम ताप 29±2°C रखा गया तथा जड़ों के भेदीकरण और वर्द्धन का अध्ययन किया गया है।

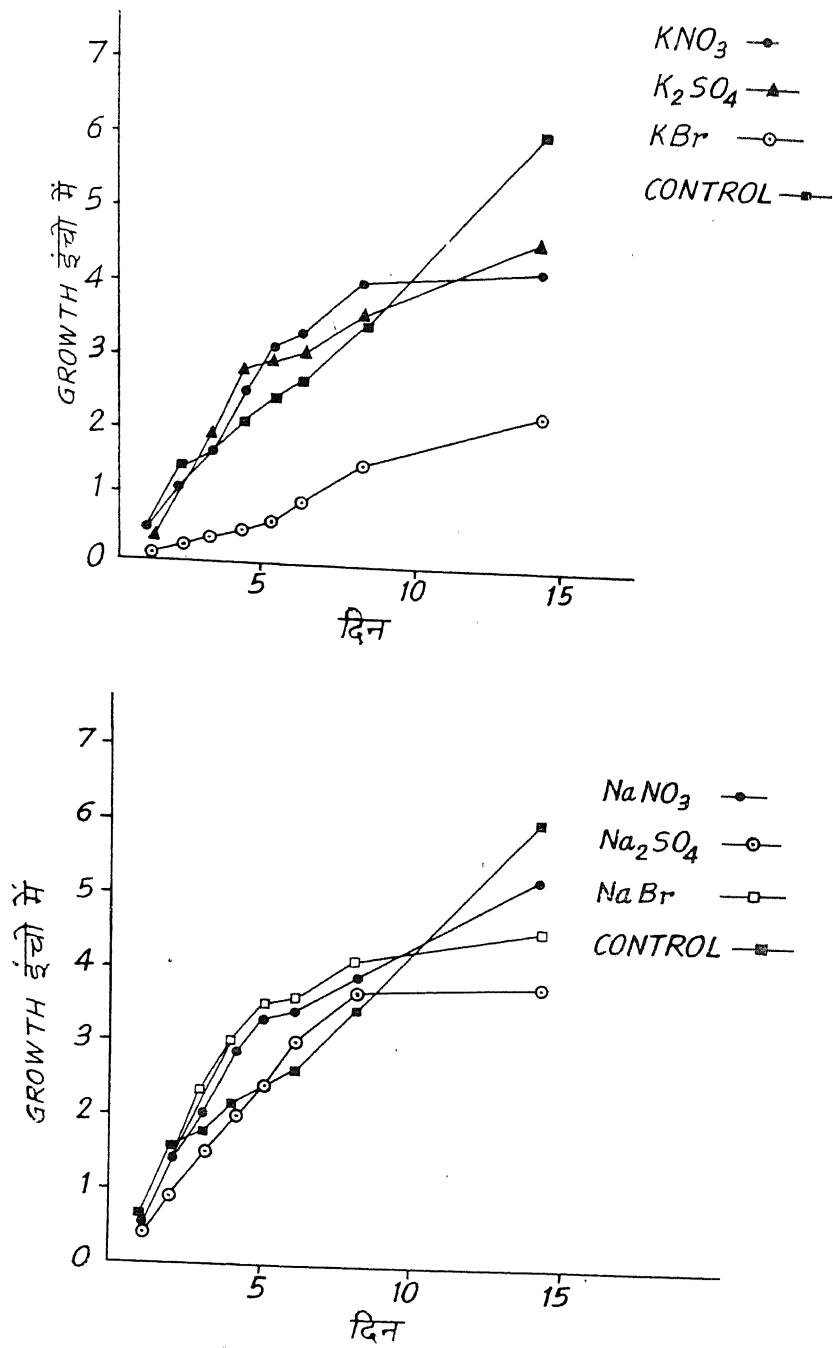
Abstract

Effect of absorption of different ions on the root growth of allium cepa bulb. II. *By* S. S. Purohit and S. C. Ameta, Department of Botany and Chemistry, Government College, Nathdwara.

The effect of different ion absorption by *Allium Cepa* roots was studied at optimum temperature (29±2° C.). It was observed that the root length was checked, when they were grown in a 0·01% solution of Br^- ions in presence of K^+ ions as compared with the allied ions. The length of the roots was enhanced in KCNS solution as compared with untreated and other treated bulbs.

पौधों में Na^+, K^+ आयनों की मात्रा काफी कम होती है। सोडियम तत्व पौधों में ऐमीनो अम्लों का परिवहन कोशिका-रस से केन्द्रक तक करता है तथा इस तरह वह केन्द्रक-प्रोटीन के संश्लेषण का नियंत्रण करता है। K^+ पौधों के वर्द्धन का एक महत्वपूर्ण कारक है। यह मुख्यतया पौधों के विभाजीय-भाग में पाया जाता है जो कोशिका विभाजन में सहायक होता है। पौधों में इसकी कमी प्रोटीन-संश्लेषण पर निरोधक और श्वसन क्रिया पर वर्धक प्रभाव दर्शाती है तथा इसकी उपस्थिति से कोशिका में डी०एन०ए० पॉलीमरेस एंजाइम बनता है।

प्रयोगात्मक

इस प्रयोग में पूर्ववर्णित[1,2] विधि का अनुसरण किया गया। विलायक के रूप में नल के जल का उपयोग हुआ। आरम्भ में अनुपचारित प्याज-कन्द में जड़ों की लम्बाई KNO_3, $NaNO_3$, Na_2SO_4,

चित्र 1 : प्याज कन्द के जड़वर्धन पर आयनों का प्रभाव

तथा NaBr से उपचारित प्याज-कन्दों की जड़-लम्बाई से कम पाई गई। किन्तु 14 दिनों की समाप्ति पर यह अनुपचारित कन्दों से अधिक हो गई। इसका प्रमुख कारण आयनों का पूर्ण अवशोषण हो सकता है। इसके विपरीत KCNS से उपचारित प्याज-कन्दों की जड़ें, अनुपचारित जड़ों से आरम्भ में कम होते हुए भी अन्त में 0·2 इंच बड़ी पाई गईं। सैद्धान्तिक आधार पर NaBr तथा KBr का प्याज के जड़-वर्धन पर समान प्रभाव होना चाहिये, परन्तु ऐसा नहीं पाया गया। चित्र 1 से यह भलीभांति स्पष्ट हो जाता है।

विवेचना

$NaNO_3$, KNO_3, तथा Na_2SO_4, K_2SO_4 का प्रभाव जड़-वर्धन पर एकसमान पाया गया। K^+ तथा Na^+ आयन जड़ों को समान रूप में प्रभावित करते हैं क्योंकि दोनों युग्मों में NO_3^- तथा $SO_4^{=}$ आयनों के समान होने से, उनके प्रभावों को उपेक्षित किया जा सकता है। इसी आधार पर जब Br^- आयन का जड़-वर्धन पर प्रभाव देखा गया तो उससे अपसामान्य परिणाम प्राप्त हुए। Br^- आयन, Na^+ आयन की उपस्थिति में जड़ की लम्बाई का वर्द्धक प्रतीत होता है जबकि K^+ आयन की उपस्थिति में यही निरोधक के रूप में जान पड़ता है। यह प्रभाव केवल Br^- आयन का ही नहीं हो सकता, क्योंकि प्रस्तुत कार्य में Br^- की सान्द्रता दोनों में समान ली गई थी। अतः प्याज कन्दों की जड़ों पर Br^- का वर्द्धक तथा निरोधक प्रभाव उसकी बाहरी परिस्थितियों द्वारा निर्धारित होता है।

Br^- के विद्युत-ऋणात्मक और क्षारकीय धातुओं (Na तथा K) के विद्युत-धनात्मक गुणों के कारण वे आयनों के रूप में एक दूसरे से वैद्युत्-संयोजकता से बन्धित होंगे। K^+ तथा Br^- में इस आकर्षण के अधिक होने के कारण KBr तथा NaBr जड़ों को Na^+ तथा K^+ की तुलना में अधिक सरलता से प्राप्त हो सकेंगे फलतः NaBr और KBr का जड़ों का क्रमशः वर्द्धक तथा निरोधक प्रभाव होगा।

सारिणी 1

प्याज-कन्द की जड़ों द्वारा भिन्न भिन्न आयनों के अवशोषण से उनके वर्धन पर प्रभाव

रसायनों की सान्द्रता		जड़ों की माध्य लम्बाई, इंचों में							
प्रतिशत 0·01	दिन	1	2	3	4	5	6	8	14
सोडियम नाइट्रेट		0·7	1·4	2·0	2·9	3·3	3·9	3·9	5·2
सोडियम सल्फेट	,,	0·4	0·9	1·5	2·0	2·4	3·0	3·7	3·8
सोडियम ब्रोमाइड	,,	0·7	1·4	2·3	3·0	3·5	3·6	4·0	4·5
पोटैशियम नाइट्रेट	,,	0·6	1·2	1·7	2·5	3·1	3·3	4·0	4·1
पोटैशियम सल्फेट	,,	0·5	1·2	1·9	2·8	2·9	3·0	3·5	4·5
पोटैशियम ब्रोमाइड	,,	0·3	0·4	0.5	0·6	0·7	1·0	1·5	2·2
पोटैशियम थायोसायनाइड	,,	0·6	1·3	2·0	2·1	2·8	3·0	3·8	6·2
अनुपचारित	,,	0·6	1·5	1·7	2·1	2·4	2·6	3·4	6·0

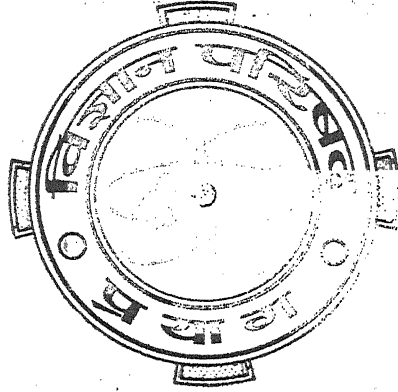
KCNS का जड़ों पर अपसामान्य वर्द्धक-प्रभाव देखा गया ।

निर्देश

1. पुरोहित, श्याम सु०, तथा आमेटा, सुरेश च० । **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका (प्रेषित)**

2. कस्तूरबा, ए० पी० तथा खान । **करेण्ट साइंस**, 1968, **37**, 111-112.

3. बोस तथा माधवकृष्ण, डब्ल्यू० । **बुले० सेण्ट० लिट० रिस० इन्स्ट० मद्रास, भारत**, 1954,**3**, 32-39.

4. बोल्ड, सी० । Mineral Nutrition of Plant in Soil. **एफ० सी० स्टीवार्ड द्वारा सम्पादित** Plant Physiology **ऐकेडमिक प्रेस, न्यूयार्क**, 3 : 15.

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

भाग 16 | अक्टूबर, 1973 | संख्या 4

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 4, October, 1973, Pages 199-201

अष्टि के रूप में व्हिटेकर फलन वाले समाकल समीकरण का प्रतिलोमन

बी० के० जोशी

गणित विभाग, गवर्नमेंट कालेज आफ इंजीनियरिंग एण्ड टेकनालाजी, रायपुर

[प्राप्त—मार्च 29, 1973]

सारांश

$M_{\kappa,\mu}(x)$ अष्टि वाले समाकल समीकरण का प्रतिलोमन किया गया है ।

Abstract

Inversion of an integral equation with Whittaker's function as its kernel. *By* B. K. Joshi, Department of Mathematics, Government College of Engineering and Technology, Raipur.

An integral equation with $M_{k,\mu}(x)$ as its kernel has been inverted.

चेबीशेव बहुपदी[5], लेगेण्ड्र बहुपदी[1], सरल लागेर बहुपदी[6], सार्वीकृत लागेर बहुपदी[3] तथा व्हिटेकर फलन[4] अष्टि वाले समाकल परिवर्तों के लिये प्रतिलोमन समाकलों पर शोध किया गया है ऐसी निर्मेय का हल निकालने का प्रयास किया गया है जिसकी अष्टि $M_{k,\mu}(x)$ हो ।

फलन $f(t)$ का लैप्लास परिवर्त

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt,\ p>0 \tag{1·1}$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है, यदि उपर्युक्त समाकल विद्यमान हो । हम (1·1) को सांकेतिक रूप में $f(t) \doteqdot F(p)$ द्वारा प्रकट करेंगे ।

निम्नांकित ज्ञात फलों [2, p. 129, 131, 215] को हम आगे व्यक्त करेंगे ।

$$f^n(t) \doteqdot p^n F(p)-p^{n-1} f(0)-p^{n-2} f'(0)-\ldots-f^{n-1}(0) \tag{1·2}$$

$$\int_0^t f_1(u)\, f_2(t-u)\, du \doteqdot g_1(p) \cdot g_2(p). \tag{1·3}$$

जहाँ $f_1(t) \doteqdot g_1(p)$ तथा $f_2(t) \doteqdot g_2(p)$.

$$t^{\mu-1/2} M_{k,\ \mu}(at) \doteqdot \frac{a^{\mu+1/2}\sqrt{2\mu+1}\ (p-\frac{1}{2}a)^{k-u-1/2}}{(p+a/2)^{k+\mu+1/2}} \tag{1·4}$$

$$\mu > -\tfrac{1}{2},\ Re p > \tfrac{1}{2}|Re\ a|$$

अपना ध्यान निम्नांकित पर केन्द्रित करते हुये

$$F_1(t) = t^{\mu-1} M_{-k,\ \mu-1(2}(2at) \doteqdot \frac{a^{\mu}\sqrt{2\mu}(p-a)^{-k-\mu}}{(p+a)^{-k+\mu}} \tag{2·1}$$

$$F_2(t) = t^{-\mu-1/2} M_{k+1/2,\ -\mu}(2at) \doteqdot \frac{a^{-\mu+1/2}\sqrt{-2\mu+1}\,(p-a)^{k+\mu}}{(p+a)^{k-\mu+1}} \tag{2·2}$$

पहले हम परिणाम

$$I_1 = \int_y^x F_1(x-t)\ F_2(t-y)\ dt = Ae^{-a(x-y)} \tag{2·3}$$

को सिद्ध करेंगे जहाँ

$$A = a^{1/2}\sqrt{2\mu}\ \sqrt{-2\mu+1}$$

$(t-y)=v$ रखकर तथा (2·1) में $(x-y)$ को u द्वारा प्रतिस्थापित करने पर

$$I_1 = \int_0^u F_1(u-v)\ F_2(v)\ dv \tag{2·4}$$

प्राप्त होगा।

अब (2·1) तथा (2·2) के प्रकाश में (1·3, का उपयोग करने पर

$$I_1 = A\frac{1}{p+a}$$

इसका लैप्लास प्रतिलोम निकालने पर हमें (2·3) की प्राप्ति होती है।

प्रमेय : यदि

(i) $\dfrac{d}{dy}[e^{ay} f(y)]$ $\quad 0 \leqslant x < x_1 < \infty$ में खंडश: शतत हो

(ii) $f(0)=0$

(iii) 2μ पूर्णांक न हो तो

$$\int_0^x F_1(x-t)\ g(t)\ dt = f(x) \quad \text{का हल निम्नवत् होगा :} \tag{3·1}$$

$$g(t) = \frac{1}{A}\int_0^t F_2(t-y)\ e^{-ay}\left[\frac{d}{dy}\ (e^{ay} f(y)\ \right]dy \tag{3·2}$$

यदि $0 \leqslant x < x_1$

उपपत्ति : यदि पुनरावृत्त समाकल

$$I_2=\frac{1}{A}\int_0^x F_1(x-t)\left[\int_0^t F_2(t-y)\ e^{-ay}\left\{\frac{d}{dy}(e^{ay}f(y)\right\}dy\ \right]dt$$

पर विचार करें जो (3·2) में $g(t)$ के प्रस्तावित मान को (3·1) में रखने से प्राप्त होगा। अब समाकलन के क्रम को परिवर्तित करने पर

$$I_2=\frac{1}{A}\int_0^x e^{-ay}\frac{d}{dy}[e^{ay}f(y)]\left[\int_y^x F_1(x-t)\ F_2(t-y)dt\right]dy$$

(2·3) का उपयोग करने पर तथा $f(0)=0$ प्रतिबन्ध के अन्तर्गत समाकलन से (3·1) स्थापित होता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० आर० एस० शर्मा तथा वी० वी० सारवाते का आभारी है जिन्होंने क्रमश: पथप्रदर्शन तथा सुविधायें प्रदान करके सहायता की।

निर्देश

1. बुशमैन, आर० जी०। अमे० मैथ० मंथली, 1962, **69,** 288-89.
2. एर्डेल्यी, ए०। Tables of Integral Transforms, **भाग** I, **मैकग्राहिल**, 1954.
3. खांडेकर, पी० आर०। Journal L'e Mathematiques Pures et Appliquees, 1965, **44,** 195-197.
4. सिंह, सी०। **मैथेमैटिक्स जैपोनिकी**, 1968, **13**(1), 1-74.
5. टा, ली।० **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1960, **11,** 290-298
6. विडर, डी० वी०। **अमे० मैथ० मंथली**, 1963, **70,** 291-93.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 4, October, 1973, Pages 203-206

प्लुति लाम्बिक श्रेणियों की आयलर संकलनीयता पर

आ० रा० सप्रे तथा एस० सी० भटनागर
गणित विभाग, आई० के० कालेज, इन्दौर

[प्राप्त—जनवरी 29, 1973]

सारांश

इस पत्र में प्लुति लाम्बिक श्रेणियों की आयलर संकलनीयता प्रतिपादित की गई है ।

Abstract

On Euler summability of lacunary orthogonal series. *By* A. R. Sapre and S. C. Bhatnagar, Mathematics Department, I. K. College, Indore.

Euler summability of lacunary orthogonal series has been established.

1. माना कि $\{\phi_n(x)\}$, $[a, b]$ में एक प्रसामान्य लाम्बिक फलन निकाय है, अर्थात्

$$\int_a^b \phi_m(x)\ \phi_n(x) dx = \begin{cases} 0, \text{ जब } m \neq n \\ 1, \text{ जब } m = n. \end{cases}$$

इन फलन निकाय $\{\phi_n(x)\}$ तथा एक संख्या अनुक्रम $\{a_n\}$ की सहायता से बनाई गई श्रेणी

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\ \phi_n(x) \tag{1·1}$$

लाम्बिक श्रेणी कहलाती है । यह ज्ञात है कि यदि

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty \tag{1·2}$$

तो ऐसी श्रेणियाँ किसी फलन $f(x) \epsilon L^2[a, b]$ का $\{\phi_n(x)\}$ निकाय में प्रसार होती हैं। इसे निम्न-लिखित प्रकार से प्रस्तुत किया जाता है।

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x).$$

श्रेणी (1·1) का n-वाँ (E, q) माध्य $\tau_n^q(x)$ निम्नलिखित समीकरण द्वारा पारिभाषित किया जाता है।

$$\tau_n^q(x) = \frac{1}{(1+q)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} S_k(x),$$

$$q>0, \text{ जहाँ } S_k(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i \phi_i(x).$$

कोई लाम्बिक श्रेणी प्लुति श्रेणी तब कहलाती है जब उसके असंख्य गुणांक शून्य हों। माना $\mu(x)$ $(x \geqq 1)$ एक धनात्मक, अवतल, एकदिष्ट वर्धमान फलन है तथा $\mu(x) \leqq x$ है।

परिभाषा 1 : श्रेणी (1·1) को हम $\mu(n)$-प्लुति कहते हैं यदि इसके शून्येत्तर गुणांकों a_k, $n<k \leqq 2n$ की संख्या $\mu(n)$ से अधिक न हो।

परिभाषा 2 : धनात्मक संख्याओं के अनुक्रम $\{q_n\}$ को गुणांकों का वरिष्ठ कहा जाता है यदि

$$a_n = O(q_n).$$

प्लुति लाम्बिक श्रेणियों का विस्तारपूर्वक अध्ययन अलेक्सिट[2] ने किया है। लाम्बिक श्रेणियों की आयलर संकलनीयता के विभिन्न पक्षों का अध्ययन मेडर[6], झा[3], पटेल[4,5], सप्रे[7,8] ने किया है। इस पत्र में हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय : यदि प्रतिबन्ध (1·2) को पूर्ण करने वाली एक $\mu(n)$-प्लुति लाम्बिक श्रेणी के गुणांकों का एक धनात्मक, एकदिष्ट, अवर्धमान, अनुक्रम $\{q_n\}$ वरिष्ठ हो जो प्रतिबन्ध

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\left(\frac{\mu(n)}{n}\right)} q_n < \infty \tag{1·3}$$

संतुष्ट करता हो तो (1·1) $[a, b]$ में प्रायः सर्वत्र $(E, q>0)$ संकलनीय होगी।

2. उपपत्ति : माना $a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \ldots, a_{\nu_N}$ वे शून्येत्तर गुणांक हैं जिनके सूचकांक n^2 तथा $(n+1)^2$ के बीच हैं। श्वार्ज़ की असमानता का उपयोग करते हुये हम लिख सकते हैं कि

$$\int_a^b |S_{(n+1)^2}(x) - S_{n^2}(x)| dx \leqq \sqrt{(b-a)} \left\{ \int_a^b [S_{(n+1)^2}(x) - S_{n^2}(x)]^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$= O(1)\left\{ \sum_{k=1}^{N} a_{\nu k}^{2} \right\}^{1/2} = O(1)\left\{ \sum_{k=1}^{N} q_{\nu k}^{2} \right\}^{1/2}$$

$\{q_n\}$ एकदिष्ट अवर्धमान होने से $q_{n^2}^2 \geqq q_{\nu_1}^2 \geqq \cdots \geqq q_{\nu_N}^2$

तथा $N \leqq \mu[(n+1)^2 - n^2] = \mu(2n+1)$!

अतः

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |S_{(n+1)^2}(x) - S_{n^2}(x)|dx = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \surd(\mu(2n+1)q_{n^2}. \tag{2·1}$$

अब हम देख सकते हैं कि यदि $n \geqq 5$ हो तो $(n-1)^2 > (2n+1)$ तथा $\mu(n-1)^2 > \mu(2n+1)$. इसलिये (2·1) से हमें

$$\sum_{n=5}^{\infty} \int_a^b |S_{(n+1)^2}(x) - S_{n^2}(x)|dx = O(1) \sum_{n=5}^{\infty} \surd(\mu(n-1)^2) q_{n^2} \sum_{k=(n-1)^2}^{n^2} \frac{1}{\surd k}$$

$$= O(1) \sum_{n=5}^{\infty} \sum_{k=(n-1)^2}^{n^2} \sqrt{\left(\frac{\mu(k)}{k}\right)} q_k < \infty$$

प्राप्त होगा।

$\mu(x)$ वर्धमान है तथा q_n अवर्धमान, अतः बी लेवी के प्रमेयानुसार (देखिये अलेक्सिट पृ० 11)

प्रायः सर्वत्र $$\sum_{n=1}^{\infty} |S_{(n+1)^2}(x) - S_{n^2}(x)| < \infty,$$

इससे श्रेणी (1·1) के n^2-वें संकल का अनुक्रम अर्थात्

$$S_{n^2}(x) = S_1 + \sum_{k=1}^{n-1} [S_{(n+1)^2}(x) - S_{n^2}(x)]$$

का प्रायः सर्वत्र अभिसरण स्पष्ट है। अब हमें ज्ञात है कि यदि अनुक्रम $\{S_{n^2}(x)\}$ अभिसारी हो तो श्रेणी (1·1) $(E, q>0)$ संकलनीय होगी। (देखिये झिझा[3]) अतः प्रमेय पूर्णरूप से सिद्ध हो गया।

कृतज्ञता-ज्ञापन

हम डा० सी० एम० पटेल के मार्गदर्शन हेतु अत्यन्त अभारी हैं।

निर्देश

1. अलेक्सिट, जी०। Convergence Problems of Orthogonal Series, **पर्गमान प्रेस,** 1961.
2. वही। *Acta. Sci. Math.* 1957 **18,** 179-188.

3. झिझा, ओ० । **डाकलेडी अकादमी नाउक एस० एस० एस० आर०**, 1962, **143**, 1257-1279.
4. पटेल, सी० एम० । **इण्डियन जर्न० मैथ०**, 1966, **8**, 41-44.
5. पटेल, सी० एम० । **मैथ० वेस्निक**, 1968, **5** (20), 219-220.
6. मेडर, जे० । **अनाल्स पोलोनिसी मैथ०**, 1950, **5**, 135-148.
7. सप्रे, अ० रा० । **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1970, **13**, 169-173.
8. वही । वही, 1972, **15**, 151-144.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 4, October 1973, Pages 207-212

लाम्बिक श्रेणी की $(\bar{N}, p_n)$ संकलनीयता पर

जय प्रकाश शर्मा
गणित विभाग, सरदार वल्लभ भाई कालेज आफ इंजीनियरिंग एण्ड टेकनालाजी, सूरत

[प्राप्त—मई 10, 1973]

सारांश

यह प्रपत्र सामान्य लाम्बिक श्रेणी की $(\bar{N}, p_n)$ संकलनीयता के सम्बन्ध में है तथा निम्नलिखित प्रमेय द्वारा कात्समार्त्स की $(c, 1)$ संकलनीयता पर के एक प्रमेय का सार्वीकरण किया गया है।

प्रमेय: माना कि लाम्बिक श्रेणी $\Sigma a_n\phi_n(x)$ का n-वाँ संकल $S_n(x)$ है जिसके गुणांक $\{a_n\}$ से प्रतिबन्ध $\Sigma a^2_n<\infty$ की तुष्टि होती है। माना कि $\{n_k\}$ एक प्लुति अनुक्रम है जिससे कि

$$1<q\leqslant\frac{n_{k+1}}{n_k}\leqslant r \text{ for } k=0, 1, 2, 3...$$

जहाँ q तथा r स्थिरांक हैं। अन्त में माना कि $\{p_n\}$ ↗ या ↙ अनुक्रम है तथा $np_n=0(p_n)$ तो लाम्बिक श्रेणी $\Sigma a_n\phi_n(x)$ प्राय: सर्वत्र $(\bar{N}, p_n)$ संकलनीय होगी यदि उपानुक्रम $\{S_{nk}(x)\}$ सर्वत्र अभिसरणीय हो।

Abstract

On the $(\bar{N}, p_n)$ summability of orthognal series. *By* Jai Prakash Sharma, Sardar Vallabh Bhai College of Engineering and Technology, Surat.

The paper deals with $(\bar{N}, p_n)$ summability of general orthogonal series, and the theorem proved generalises a result of Kaczmarz on $(c, 1)$-summability of the series. The following theorem has been proved.

THEOREM. Let $S_n(x)$ be the nth partial sums of the orthogonal series $\Sigma a_n\phi_n(x)$ with coefficients $\{a_n\}$ satisfying the condition $\Sigma a^2_n<\infty$, and let $\{n_k\}$ be an arbitrary increasing sequence of indices satisfying the relation

$$1<q\leqslant\frac{n_{k+1}}{n_k}\leqslant r \text{ for } k=0, 1, 2, 3, ...$$

AP 2

where q and r are constants. Finally let $\{p_n\}$ be either monotonically increasing or decreasing sequence of real numbers such that $np_n=0(p_n)$, then the orthogonal serie $\Sigma a_n\phi_n(x)$ is $(\overline{N}, p_n)$ summable almost everywhere, if the sequence of partial sums $\{S_{n_k}(x)\}$ is convergent almost everywhere.

माना कि $\{\phi_n(x)\}$, $n=0, 1, 2, 3...[a, b]$ में एक प्रसामान्य लाम्बिक फलन निकाय है, अर्थात्

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)\ dx=\begin{cases}0 & \text{जब} \quad m\neq n\\ 1 & \text{जब} \quad m=n.\end{cases}$$

हम एक ऐसी लाम्बिक श्रेणी

$$\Sigma a_n\phi_n(x) \tag{1·1}$$

लेंगे, जिसमें

$$\Sigma a^2_n<\infty \quad \text{हो ।} \tag{1·2}$$

उपर्युक्त श्रेणी का n-वां संकल $S_n(x)$ से प्रदर्शित किया जाता है अर्थात्

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k\phi_k(x).$$

माना कि $\{p_n\}$ एक वास्तविक संख्याओं का अनुक्रम है तथा

$$p_0>0,\ p_n\geqslant 0 \ \text{और}\ P_n=p_0+p_1+p_2+\ldots+p_n\to\infty$$

माना
$$t_n(x)=\frac{p_0S_0(x)+p_1S_1(x)+\ldots+p_nS_n(x)}{P_n}.$$

$t_n(x)$ को हम n-वां $(\overline{N}, p_n)$ माध्य कहते है ।

परिभाषा: यदि $\lim_{n\to\infty} t_n(x)=S(x)$

तो हम कहते हैं कि श्रेणी (1·1) $(\overline{N}, p_n)$ विधि से $S(x)$ की संकलनीय है । यह सर्वविदित है कि $(\overline{N}, p_n)$ संकलनीय विधि एक नियमित विधि है यदि

$$\lim_{n\to\infty} p_n/P_n=0$$

तथा
$$np_n=0(P_n)$$

यदि हम $p_n\equiv 1$ लें तो $(\overline{N}, p_n)$ माध्य $(c, 1)$ माध्य में परिवर्तित हो जाता है (देखिये हार्डी[5] (पृ० 57) ।

2. प्रसामान्य लाम्बिक श्रेणी के अभिसरण का विस्तारपूर्वक अध्ययन राडेमाखर[6] तथा मैनेसोफ[7] ने किया है । इस श्रेणी के (N, p_n) माध्यों का मेडर[3] ने विवेचन किया है । इस शोध पत्र में

प्रमामान्य लाम्बिक श्रेणी की $(\bar{N}, p_n)$ संकलनीयता पर प्रकाश डाला गया है तथा निम्नलिखित प्रमेय द्वारा कात्समार्त्स[2] की $(c, 1)$ संकलनीयता पर के एक प्रमेय का सार्वीकरण किया गया है।

प्रमेय: माना $\{n_k\}$ एक प्लुति अनुक्रम है, अर्थात्

$$1<q\leqslant \frac{n_{k+1}}{n_k}\leqslant r,\ k=0, 1, 2, \ldots \tag{2·1}$$

q तथा r स्थिरांक हैं।

यदि
$$\Sigma\, a^2{}_n<\infty \tag{2·2}$$

और $\{p_n\}$ ↗ या ↙ अनुक्रम हो तथा $np_n=0(P_n)$ तो लाम्बिक श्रेणी (1·1) प्रायः सर्वत्र (a, b) में $(\bar{N}, p_n)$ संकलनीय होगी, यदि उपानुक्रम $\{S_{nk}(x)\}$ प्रायः सर्वत्र (a, b) में अभिसरणीय हो। इस प्रमेय का विलोम भी सत्य है।

उपर्युक्त प्रमेय को सिद्ध करने के लिए हमें निम्नलिखित उपप्रमेयों की आवश्यकता होगी:

उपप्रमेय 1: (मेडर[4]) यदि अनुक्रम $\{n_k\}$ धनोत्तर एवं प्लुति (lacunary) हो तो अनुक्रम $\{P_{nk}\}$ भी प्लुति अनुक्रम होता है, अर्थात्

$$1<q_1\leqslant \frac{P_{n_{k+1}}}{P_{nk}},\ k=0, 1, 2, \ldots .$$

जहाँ q एक स्थिरांक हैं (उपपत्ति के लिये देखिये मेडर[4], उपप्रमेय 6, पृ० 336)।

उपप्रमेय 2: माना कि $t_n(x)$ लाम्बिक श्रेणी (1·1) के जिसके गुणक $\{a_n\}$ अनुबन्ध (2·2) को सन्तुष्ट करते हैं, n-वें $(\bar{N}, p_n)$ माध्यों को प्रदर्शित करते हैं तथा अनुक्रम $\{p_n\}$ ↖ या ↘ है और $n=p_n=0\ (P_n)$ को सन्तुष्ट करता हैं तो श्रेणी

$$\sum_{k=0}^{\infty} (S_{nk}(x)-t_{nk}(x))^2$$

प्रायः सर्वत्र अभिसरणीय होती है।

उपपत्ति: यहाँ

$$S_k(x)-t_k(x)=\sum_{i=0}^{k} a_i\phi_i(x)-\frac{1}{P_k}\sum_{i=0}^{k} p_iS_i(x)$$

$$=\sum_{i=0}^{k} a_i\phi_i(x)-\frac{1}{P_k}\sum_{i=0}^{k} a_i\phi_i(p)\sum_{v=i}^{k} p_v$$

$$=\frac{1}{P_k}\sum_{i=0}^{k} a_i\phi_i(x)\ P_{i-1}$$

चूंकि $0<p_n$, ↗ या ↙ और $\{\phi_n(x)\}$ एक लाम्बिक फलन निकाय है अत:

$$\int_a^b (S_k(x)-t_k(x))^2\,dx=\frac{1}{P^2_k}\sum_{i=0}^{k} a_i^2P_{i-1}^2\leqslant\frac{1}{P^2_k}\sum_{i=0}^{k} a_i^2P_i^2$$

उर्युक्त समीकरण में k के स्थान पर n_k रखने पर हम लिख सकते हैं कि

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^b (S_{n_k}(x)-t_{n_k}(x)^2\,dx\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{P^2_k}\sum_{i=0}^{n_k} a_i^2P_i^2$$

$$\leqslant\left(\frac{q_1^2}{q_1^2-1}\right)\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2<\infty.$$

अत: लेवी की साध्य (देखिये अलेक्सीट पृ० 11) के उपयोग से यह निष्कर्ष निकलता कि है श्रेणी

$$\sum_{k=0}^{\infty}(S_{n_k}(x)-t_{n_k}(x))^2$$

प्राय: सर्वत्र (a, b) में अभिसरणीय है।

उपप्रमेय 2 में यदि $p_n\equiv 1$ रखें तो हमें कौलमोगोरोफ की $(c, 1)$ संकलनीयता की साध्य प्राप्त होती है।

उपप्रमेय 3: यदि अनुक्रम $\{p_n\}$↗ या ↙ तथा $np_n=0(P_n)$ हो और लाम्बिक श्रेणी (1·1) के गुणक a_n अनुबन्ध (1·2) को सन्तुष्ट करते हैं तो श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty} n[t_n(x)-t_{n-1}(x)]^2$$

प्राय: सर्वत्र अभिसरणीय होती है।

उपपत्ति: हम लिख सकते हैं,

$$t_n(x)-t_{n-1}(x)=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_kS_k(x)-\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1} p_kS_k(x)$$

$$=\left(\frac{1}{P_n}-\frac{1}{P_{n-1}}\right)\sum_{k=0}^{n-1} p_kS_k(x)+\frac{p_n}{P_n}S_n(x)$$

$$=-\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1} p_k\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu\phi_\nu(x)+\frac{p_n}{P_n}S_n(x)$$

$$=-\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu\phi_\nu(x)\sum_{k\geqslant\nu}^{n-1} p_k+\frac{p_n}{P_n}S_n(x)$$

$$=-\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu\phi_\nu(x)\sum_{k=0}^{n-1} p_k+\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu\phi^\nu(x)\sum_{k=0}^{\nu-1} p_k+\frac{p_nS_n}{P_n}$$

$$=\frac{p_n}{P_n}(S_n(x)-S_{n-1}(x)+\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu\phi_\nu(x)\sum_{k=0}^{\nu-1} p_k$$

$$=\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\phi_\nu(x)P_{\nu-1}$$

अतः

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b n[t_n(x)-t_{n-1}(x)]^2\,dx\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{np_n^2}{P_n^2P_{n-1}^2}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2 P_{\nu-1}^2$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{P_nP_{n-1}^2}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2 P_{\nu-1}^2$$

$$=O(1)\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2P_{\nu-1}^2\sum_{n\geqslant\nu}^{\infty}\frac{p_n}{P_nP_{n-1}^2}$$

$$=O(1)\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2P_{\nu-1}^2\sum_{n\geqslant\nu}^{\infty}\left(\frac{1}{P_{n-1}^2}-\frac{1}{P_n^2}\right)$$

$$=O(1)\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2<\infty.$$

अतः लेवी की साध्य से

$\sum_{n=1}^{\infty} n(t_n(x)-t_{n-1}(x))^2$ प्रायः सर्वत्र अभिसरणीय है।

3. **प्रमेय की उपपत्तिः** माना कि उपानुक्रम $\{S_{n_k}(x)\}$ प्रायः सर्वत्र (a, b) में अभिसरणीय है तथा अनुक्रम $\{n_k\}$ एवं $\{p_n\}$ प्रमेय में दिये हुए अनुबन्धों को सन्तुष्ट करते हैं। अतः उपप्रमेय 2 के उपयोग से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि $(\bar{N}, p_n)$ साध्यों का उपानुक्रम $\{t_{n_k}(x)\}$ प्रायः सर्वत्र (a, b) में अभिसरणीय है।

अब हम m एक ऐसा प्राकृतिक धनात्मक अंक लेते हैं जो निम्नलिखित अनुबन्धों को सन्तुष्ट करता है :

$$n_k\leqslant m<n_{k+1},\ k=0,\ 1, 2, \ldots .$$

तब

$$(t_m(x)-t_{n_k}(x))^2=\left(\sum_{n=n_k+1}^{m}(t_n(x)-t_{n-1}(x)\right)^2 \tag{3·1}$$

$$\leqslant \sum_{n=n_k+1}^{n_k+1} n(t_n(x)-t_{n-1}(x))^2 \sum_{n=nk+1}^{nk+1} \frac{1}{n}.$$

लेकिन
$$\sum_{n=n_k+1}^{nk+1} \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_k} (n_{k+1}-n_k) = \frac{n_{k+1}}{n_k} - 1 < r-1$$

अतः उपर्युक्त गणना तथा उपप्रमेय 3 के उपयोग से समीकरण (3·1) का दायाँ पक्ष शून्य को अग्रसर करता है अर्थात्

$$(t_m(x) - t_{r_k}(x)) = O(1)$$

किन्तु अनुक्रम $\{t_{n_k}(x)\}$ प्रायः सर्वत्र (a, b) में अभिसरणीय है अतः $\{t_m(x)\}$ भी प्रायः सर्वत्र (a, b) में अभिसरणीय होगा। लाम्बिक श्रेणी (1·1)$(\overline{N}, p_n)$ संकलनीय होगी।

विलोम: माना कि अनुक्रम $\{p_n\}$ तथा $\{n_k\}$ प्रमेय में दिये गये अनुबन्धों को संतुष्ट करते हैं तथा लाम्बिक श्रेणी (1·1) जिसके गुणक अनुबन्ध (1·2) को संतुष्ट करते हैं, $(\overline{N}, p_n)$ संकलनीय है, अर्थात् लाम्बिक श्रेणी के $(\overline{N}, p_n)$ माध्यों का अनुक्रम $\{t_n(x)\}$ अभिसरणीय है। जैसा कि सर्वविदित है कि किसी भी अभिसरणीय अनुक्रम का प्रत्येक उपानुक्रम भी अभिसरणीय होता है। हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि उपानुक्रम $\{t_{nk}(x)\}$ भी अभिसरणीय है। चूंकि $\{t_{nk}(x)\}$ एक अभिसरणीय अनुक्रम है, उपप्रमेय 2 के उपयोग से यह निष्कर्ष निकलता है कि अनुक्रम $\{S_{nk}(x)\}$ भी प्रायः सर्वत्र अभिसरणीय होगा।

निर्देश

1. अलेक्सीट, जी०। Convergence Problems of Orthogonal Series, **पर्गमैन प्रेस,** 1961
2. कात्समार्त्स, एस०। **मैथ ऐनालिन**, 1925 **96**, 148-151
3. मेडर, जे०। Bull Del' Acad. Polon-Dés Sciences, 1961, **9** (3), 123-27
4. वही। **एनल्स पोलीन० मैथ०** 1963, **12**, 236-256
5. हार्डी, जी० एच०। Divergent Series· **आक्सफोर्ड**, 1959
6. राडेमाखर, एच०। **मैथ० ऐनालिन,** 1922, **87**, 112-138
7. मैनेसोफ, डी०। **फन्डामेन्टा मैथ०**, 1923 **4**, 82-105

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 4, October, 1973, Pages 213-222

सार्वीकृत फलन वाले कतिपय समाकल-I

एम० पी० चौबीसा
गणित विभाग, उदयपुर विश्वविद्यालय, उदयपुर

[प्राप्त—अप्रैल 12, 1973]

सारांश

शर्मा द्वारा पारिभाषित दो चरों वाले सार्वीकृत S-फलन सम्बन्धी कतिपय सान्त समाकलों का मान ज्ञात किया गया है। यह फलन कैम्प द फेरी द्वारा पारिभाषित दो चरों वाले हाइपरज्यामितीय फलन का सार्वीकरण है। प्राप्त परिणाम सामान्य कोटि के हैं किन्तु विशेष रूप से माइजर के G-फलन के गुणनफल वाले कुछ समाकल प्राप्त हुये हैं।

Abstract

Some integrals involving generalised function-I. *By* M. P. Chobisa, Department of Mathematics, University of Udaipur, Udaipur.

In this note we evaluate some finite integrals involving generalised S-function of two variables defined by Sharma. This function is a generalisation of hypergeometric function of two variables defined by Appellete Kampe'de Feriet. The results are of general character and in particular we obtain some integrals involving the product of Meijer's G-function.

1. विषय प्रवेश:

शर्मा[5] ने अपने एक अर्वाचीन शोध पत्र में दो चरों वाले फलन को निम्न प्रकार से पारिभाषित किया है:

$$S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}H, & o\\ R-H, & q\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}\beta, & \alpha\\ \gamma-\beta, & \delta-\alpha\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}B, & A\\ C-B, & D-A\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\beta_R);\ (a_q)\\ (a_\gamma);\ (b_\delta)\\ (e_c);\ (f_D)\end{matrix}\right|\begin{matrix}x\\ \\ y\end{matrix}\right]=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int\ \frac{\prod_{j=1}^{H}\Gamma(\beta;\ +s+t)}{\prod_{j=H+1}^{R}\Gamma(1-\beta;\ -s-t)}$$

$$\times \frac{\prod_{j=1}^{\beta} \Gamma(1-a_j+s) \prod_{j=1}^{\alpha} \Gamma(b_j-s) \prod_{j=1}^{\beta} \Gamma(1-e_j+t) \prod_{j=1}^{A} \Gamma(f_j-t)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(a_j+s+t) \prod_{j=\beta+1}^{\gamma} \Gamma(a_j-s) \prod_{j=\alpha+1}^{\delta} \Gamma(1-b_j+s) \prod_{j=\beta+1}^{C} \Gamma(e_j-t) \prod_{j=A+1}^{D} \Gamma(1-f_j+t)} x^s t^t \, ds \, dt. \tag{1·1}$$

जहाँ L_1 तथा L_2 उपयुक्त कंटूर तथा $H, q, R, \alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C$, धनपूर्णांक हैं और D द्वारा निम्नांकित असमिकायें तुष्ट होती हैं $\delta \geqslant 1, D \geqslant 1, R \geqslant 0, q \geqslant 0, 0 \leqslant H \leqslant R, 0 \leqslant \beta \leqslant \gamma, 0 \leqslant \alpha \leqslant \delta, 0 \leqslant B \leqslant C, 0 \leqslant A \leqslant D, R+\gamma \leqslant q+\delta$ तथा $R+C \leqslant q+D$.

$x=0$ तथा $y=0$ मान सम्मिलित नहीं किये गये, (β_r) द्वारा $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$, प्राचलों का सेट व्यक्त होता है और संकेत $\triangle(m, n)$ से m प्राचलों के सेट

$$\frac{n}{m}, \frac{n+1}{m}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{n+m-1}{m},$$

का बोध होता है।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य S-फलन वाले कतिपय सान्त समाकलों का मान ज्ञात करना और विशेष रूप से माइजर के G-फलन के गुणनफल सम्बन्धी कतिपय समाकल प्राप्त करना है। चूँकि G-फलन कई विशिष्ट फलन का सार्वीकरण है, अतः प्राप्त सूत्रों से बेसेल, लेगेण्ड्र, व्हिटेकर फलन तथा कई अन्य सम्बद्ध फलन वाले अनेक फल प्राप्त होंगे।

2. अपने शोधकार्य के लिये हमें निम्नांकित फलों की आवश्यकता पड़ेगी:

(i) गामा फलन सूत्र [2. p. 4 (11)]

$$\Gamma(mz) = (2\pi)^{1/2-m/2}(m)^{mz-1/2} \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(z+\frac{k}{m}\right) \tag{2·1}$$

जहाँ m धन पूर्णांक है।

(ii) निश्चित समाकल [6, (5); 6, (6)]

(a) $$\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta}(\sin\theta)^{\alpha-1}(\cos\theta)^{\beta-1} {}_2F_1(a, b; \beta; e^{i\theta}\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{e^{\pi i\alpha/2}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta-a-b)}{\Gamma(\alpha+\beta-a)\Gamma(\alpha+\beta-b)} \tag{2·2}$$

$R(\alpha)>0, R(\beta)>0, R(\beta-a-b)>0$ के लिये विहित है।

(b) $\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta}(\sin\theta)^{\alpha-1}(\cos\theta)^{\beta-1}\,{}_2F_1\,(a, b; a; e^{i(\theta-\pi/2)}\sin\theta)\,d\theta$

$$=\frac{e^{i\pi\alpha/2}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta-a-b)}{\Gamma(\alpha+\beta-a)\Gamma(\alpha+\beta-b)}$$

$R(\alpha)>0$, $R(\beta)>0$, $R(\bar{\alpha}-a-b)>0$ के लिये विहित है। (2·3)

(c) वर्मा तथा भोंसले [8, p. 104 (2·2)]

$$\int_0^1 x^{m/2+p}(1-x)^{m/2}P_n^m\,(2x-1)\,dx=\frac{(-1)^{m/2}\Gamma(m+n+1)\Gamma(p+1)\Gamma(p+m+1)}{m!\,\Gamma(n-m+1)\Gamma(p+m+n-2)\Gamma(p+m-n+1)}$$

जहाँ m धन पूर्णांक है और $p>-m-1$ (2·5)

(d) एर्डेल्यी [3, p. 284 (1)]

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\sigma}P_n^{\alpha,\,\beta}\,(x)\,dx=\frac{2^{\alpha+\sigma+1}\Gamma(\sigma+1)\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\sigma-\beta+1)}{\Gamma(\sigma-\beta-n+1)\Gamma(\sigma+\sigma+n+2)}$$

$R(\alpha)>-1$, $R(\sigma)>-1$ के लिये विहित है। (2·6)

(iii) शर्मा [7, p. 139 (7)]

$$S\left[\begin{array}{l|c|c} \begin{bmatrix}0, & 0\\ 0, & 0\end{bmatrix} & ; & x \\ \begin{pmatrix}\beta, & \alpha\\ \gamma-\beta, & \delta-\alpha\end{pmatrix} & (a_\gamma);\ (b_\delta) & \\ \begin{pmatrix}B, & A\\ C-B, & D-A\end{pmatrix} & (e_C);\ (f_D) & y\end{array}\right]=G_{\gamma,\,\delta}^{\alpha,\,\beta}\left(x\Big/\begin{matrix}(a_\gamma)\\(b_\delta)\end{matrix}\right)G_{C,\,D}^{A,\,B}\left(y\Big/\begin{matrix}(e_C)\\(f_D)\end{matrix}\right) \qquad (2\cdot7)$$

3. समाकल

3. 1. प्रथम समाकल

$$\int_0^{\pi/2} e^{i(\sigma+\rho)\theta}(\sin\theta)^{\sigma-1}(\cos\theta)^{\rho-1}\,{}_2F_1\,(a, b; \rho; e^{i\theta}\cos\theta)$$

$$S\left[\begin{array}{l|c|c} \begin{bmatrix}H, & 0\\ R-H, & q\end{bmatrix} & (\beta_R);\ (\alpha_q) & \eta \\ \begin{pmatrix}\beta, & \alpha\\ \gamma-\beta, & \delta-\alpha\end{pmatrix} & (a_\gamma);\ (b_\delta) & e^{im(\theta-\pi/2)} \\ \begin{pmatrix}B, & A\\ C-B, & D-A\end{pmatrix} & (e_C);\ (f_D) & (\sin\theta)^m z\end{array}\right]d\theta$$

$$= \frac{e^{\pi i\sigma/2}\Gamma(\rho)}{(m)^{\rho}}$$

$$S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}H, 0\\ R-H, q\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}\beta, \alpha\\ \gamma-\beta, \delta-\alpha\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}2m+B, A\\ C-B, 2m+D-A\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\beta_R) \;;\; (a_q)\\ (a_\gamma) \;;\; (b_\delta)\\ \triangle(m, 1-\sigma),\ \triangle(m, 1+a+b-\sigma-\rho), (e_C); (f_D)\\ \triangle(m, 1+a-\sigma-\rho), \triangle(m, 1+b-\sigma-\rho)\end{matrix}\right|\begin{matrix}\eta\\ \\ z\end{matrix}\right]$$

जहाँ $R(\sigma)>0, R(\rho)>0, R(\rho-a-b)>0$, m धन पूर्णांक है,

$$\beta\geqslant 1, B\geqslant 1, 2(H+\alpha+\beta)>(R+q+\gamma+\delta), 2(H+A+B)>(R+q+C+D),$$

$$|\arg\eta|<\left(H+\alpha+\beta-\frac{R}{2}-\frac{q}{2}-\frac{\gamma}{2}-\frac{\delta}{2}\right)\pi, \ |\arg z|<\left(H+A+B-\frac{R}{2}-\frac{q}{2}-\frac{C}{2}-\frac{D}{2}\right)\pi,$$

$$R(1+mb_j+mf_j)>0 \quad 1\leqslant j\leqslant \alpha \quad 1\leqslant j\leqslant A \tag{3·1·1}$$

उपपत्ति

सिद्ध करने के लिये (3·1·1) के समाकल्य में (1·1) से दो चरों वाले सार्वीकृत फलन का मान रखते हुये, तथा समाकलनों का क्रम परिवर्तित करते हुये, जो कि वैध है, (3·1·2) की प्राप्ति होती है।

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{\prod_{j=1}^{H}\Gamma(\beta_j+s+t)\prod_{j=1}^{\beta}\Gamma(1-a_j+s)\prod_{j=1}^{\alpha}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{B}\Gamma(1-e_j+t)}{\prod_{j=H+1}^{R}\Gamma(1-\beta_j-s-t)\prod_{j=1}^{q}\Gamma(a_j+s+t)\prod_{j=\beta+1}^{\gamma}\Gamma(a_j-s)\prod_{j=\alpha+1}^{\delta}\Gamma(1-b_j+s)\prod_{j=B+1}^{C}\Gamma(e_j-t}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{A}\Gamma(f_j-t)}{\prod_{j=A+1}^{D}\Gamma(1-f_j+t)}e^{-\pi m s/2}\eta^s z^t\left[\int_0^{\pi/2}e^{i(\sigma+\rho+ms)\theta}(\sin\theta)^{\sigma+ms-1}(\cos\theta)^{\rho-1}\,{}_2F_1(a, b; \rho; e^{i\theta}\cos\theta)\,d\theta\right]ds.dt \tag{3·1·2}$$

अब θ समाकल का मान (2·2) की सहायता से निकालने पर तथा फल (2·1) का उपयोग करने पर (3·1·2)

$$\frac{e^{\pi i\sigma/2}\Gamma(\rho)}{(m)^{\rho}}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{\prod_{j=1}^{H}\Gamma(\beta_j+s+t)\prod_{j=1}^{\beta}\Gamma(1-a_j+s)\prod_{j=1}^{\alpha}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{B}\Gamma(1-e_j+t)}{\prod_{j=H+1}^{R}\Gamma(1-\beta_j-s-t)\prod_{j=1}^{q}\Gamma(a_j+s+t)\prod_{j=\beta+1}^{\gamma}\Gamma(a_j-s)\prod_{j=\alpha+1}^{\delta}\Gamma(1-b_j+s)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{A}\Gamma(f_j-t)\prod_{i=0}^{m-1}\Gamma\left[1-\left\{1-\frac{\sigma+i}{m}\right\}+s\right]\prod_{i=0}^{m-1}\Gamma\left[1-\left\{1-\frac{\sigma+\rho-a-b+i}{m}\right\}+s\right]\eta^s z^t}{\prod_{j=B+1}^{C}\Gamma(e_j-t)\prod_{j=A+1}^{D}\Gamma(1-f_j+t)\prod_{i=0}^{m-1}\Gamma\left[1-\left\{1-\frac{\sigma+\rho-a+i}{m}\right\}+s\right]\prod_{i=0}^{m-1}\Gamma\left[1-\left\{1-\frac{\sigma+\rho-b+i}{m}\right\}+s\right]}ds\,.\,dt \qquad (3{\cdot}1{\cdot}3)$$

का रूप धारण कर लेता है ।

कंटूर L_1 S-तल पर अवस्थित है और आवश्यक हुआ तो अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ होकर जाता है जिससे $\Gamma(b_j-s)$, $(j=1, 2, \ldots, \alpha)$, के पोल कंटूर के दाईं ओर रहें तथा $\Gamma(1-a_j+s)$, $(j=1, 2,\ldots, \beta)$; $\Gamma\left[1-\left\{1-\frac{\sigma+\rho-a-b+i}{m}\right\}+s\right]$, $(i=1; 2, \ldots, m-1)$; $\Gamma\left[1-\left\{1-\frac{\sigma+i}{m}\right\}+s\right.$, $(i=1, 2, \ldots, m-1)$ तथा $\Gamma[\beta_j+s+t]$, $(j=1, 2, \ldots, H)$ के पोल कंटूर के बाईं ओर।

इसी प्रकार कंटूर L_2 t-तल में रहता है और आवश्यकता हुई तो $-i\infty$ से $+i\infty$ होकर जाता है जिससे $\Gamma(f_j-t)$, $(j=1, 2, \ldots, A)$ के पोल कंटूर के दाईं ओर और $\Gamma(1-e_j+t)$, $(j=1, 2, \ldots, B)$ के पोल कंटूर के बाईं ओर ही पड़ें ।

(1·1) की सहायता से (3·1·3) की विवेचना करने पर उक्त प्रतिबन्धों के अन्तर्गत (3·1·1) प्राप्त होता है ।

विशिष्ट दशा

$H=q=R=0$ होने पर तथा सूत्र (2·7) का उपयोग करने पर (3·1·1) एक ज्ञात फल [6, (13)] का रूप धारण कर लेता है ।

$$=\frac{(-1^{\mu/2}\Gamma(\mu+l+1)}{\mu!\,\Gamma(l-\mu+1(\sigma)^{\mu+1}}\times$$

$$S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}2\sigma+H, 0\\ R-H, q+2\sigma\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}\beta, a\\ \gamma-\beta, \delta-a\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}B, A\\ C-B, D-A\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(\sigma, k+1), \triangle(\sigma, k+\mu+1); (\beta_r); (a_q), \triangle(\sigma, k+\mu+l+2), \triangle(\sigma, k+\mu-l+1)\\ (a_\gamma) \quad ; \quad (b_\delta)\\ (e_C) \quad ; \quad (f_D)\end{matrix}\right|\begin{matrix}a\\ \\ b\end{matrix}\right]$$

जहाँ $k>-\mu-1$, σ तथा μ धन पूर्णांक हैं

$$\beta\geqslant 1, \beta\geqslant 1, 2(H+\alpha+\beta)>(R+q+\gamma+\delta), 2(H+A+B)>(R+q+C+D),$$

$$|\arg a|<\left(H+\alpha+\beta-\frac{R}{2}-\frac{q}{2}-\frac{\gamma}{2}-\frac{\delta}{2}\right)\pi, \ |\arg b|<\left(H+A+B-\frac{R}{2}-\frac{q}{2}-\frac{C}{2}-\frac{D}{2}\right)\pi,$$

$$R(k+1+\frac{\mu}{2}+\sigma b_j+\sigma f_j)>0$$

$$1\leqslant j\leqslant \alpha \quad 1\leqslant j\leqslant A \tag{3·3·1}$$

(3·3·1) की उपपत्ति (3·1·1) के ही समान है ।

विशिष्ट दशा

$H=q=R=0$ मानने पर तथा (2·7) के उपयोग से

$$\int_0^1 x^{\mu/2+k}(1-x)^{\mu/2} P_l^{\mu}(x)\, G_{\gamma,\delta}^{\alpha,\beta}\left(ax^\sigma\middle|\begin{matrix}(a_\gamma)\\(b_\delta)\end{matrix}\right) G_{C,D}^{A,B}\left(bx^\sigma\middle|\begin{matrix}(e_C)\\(f_D)\end{matrix}\right)dx$$

$$=\frac{(-1)^{\mu/2}\Gamma(\mu+l+1)}{\mu!\,\Gamma(l-\mu+1)(\sigma)^{\mu+1}}\times$$

$$S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}2\sigma, 0\\ 0, 2\sigma\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}\beta, \alpha\\ \gamma-\beta, \delta-\alpha\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}B, A\\ C-B, D-A\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(\sigma, k+1), \triangle(\sigma, k+\mu+1); \triangle(\sigma, k+l+\mu+2), \triangle(\sigma, k+\mu-l+1)\\ (a_\gamma) \quad ; \quad (b_\delta)\\ (e_C) \quad ; \quad (f_D)\end{matrix}\right|\begin{matrix}a\\ \\ b\end{matrix}\right]$$

जहाँ μ धन पूर्णांक है तथा $p>-m-1$

$$\beta\geqslant 1, B\geqslant 1, 2(\alpha+\beta)>(\gamma+\delta)2(A+B)>(C+D)$$

$$=\frac{(-1^{\mu/2}\Gamma(\mu+l+1)}{\mu!\,\Gamma(l-\mu+1(\sigma)^{\mu+1}}\times$$

$$S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}2\sigma+H, 0\\ R-H, q+2\sigma\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}\beta, \alpha\\ \gamma-\beta, \delta-\alpha\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}B, A\\ C-B, D-A\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(\sigma, k+1), \triangle(\sigma, k+\mu+1); (\beta_r); (\alpha_q), \triangle(\sigma, k+\mu+l+2), \\ \triangle(\sigma, k+\mu-l+1)\\ (a_\gamma) \quad ; \quad (b_\delta)\\ (e_C) \quad ; \quad (f_D)\end{matrix}\right|\begin{matrix}a\\ \\ b\end{matrix}\right]$$

जहाँ $k>-\mu-1$, σ तथा μ धन पूर्णांक हैं

$$\beta\geqslant 1,\ \beta\geqslant 1,\ 2(H+\alpha+\beta)>(R+q+\gamma+\delta),\ 2(H+A+B)>(R+q+C+D),$$

$$|\arg a|<\left(H+\alpha+\beta-\frac{R}{2}-\frac{q}{2}-\frac{\gamma}{2}-\frac{\delta}{2}\right)\pi,\ |\arg b|<\left(H+A+B-\frac{R}{2}-\frac{q}{2}-\frac{C}{2}-\frac{D}{2}\right)\pi,$$

$$R(k+1+\frac{\mu}{2}+\sigma b_j+\sigma f_j)>0$$

$$1\leqslant j\leqslant \alpha \quad 1\leqslant j\leqslant A \tag{3·3·1}$$

(3·3·1) की उपपत्ति (3·1·1) के ही समान है ।

विशिष्ट दशा

$H=q=R=0$ मानने पर तथा (2·7) के उपयोग से

$$\int_0^1 x^{\mu/2+k}(1-x)^{\mu/2}\,P_l^{\mu}(x)\,G_{\gamma,\,\delta}^{\alpha,\,\beta}\left(ax^{\sigma}\middle|\begin{matrix}(a_\gamma)\\(b_\delta)\end{matrix}\right)G_{C,\,D}^{A,\,B}\left(bx^{\sigma}\middle|\begin{matrix}(e_C)\\(f_D)\end{matrix}\right)dx$$

$$=\frac{(-1)^{\mu/2}\Gamma(\mu+l+1)}{\mu!\,\Gamma(l-\mu+1)(\sigma)^{\mu+1}}\times$$

$$S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}2\sigma, 0\\ 0, 2\sigma\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}\beta, \alpha\\ \gamma-\beta, \delta-\alpha\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}B, A\\ C-B, D-A\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(\sigma, k+1), \triangle(\sigma, k+\mu+1); \triangle(\sigma, k+l+\mu+2), \\ \triangle(\sigma, k+\mu-l+1)\\ (a_\gamma) \quad ; \quad (b_\delta)\\ (e_C) \quad ; \quad (f_D)\end{matrix}\right|\begin{matrix}a\\ \\ b\end{matrix}\right]$$

जहाँ μ धन पूर्णांक है तथा $p>-m-1$

$$\beta\geqslant 1,\ B\geqslant 1,\ 2(\alpha+\beta)>(\gamma+\delta)2(A+B)>(C+D)$$

$$|\arg a|<\left(\alpha+\beta-\frac{\gamma}{2}-\frac{\delta}{2}\right)\pi,\ |\arg b|<\left(A+B-\frac{C}{2}-\frac{D}{2}\right)\pi,$$

$$R\left(\frac{\mu}{2}+k+1+\sigma b_j+\sigma f_j\right)>0$$

$$1\leqslant j\leqslant \alpha \quad 1\leqslant j\leqslant A \tag{3·3·2}$$

3·4. चौथा समाकल:

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma}P_{n(x)}^{\rho,\eta}\,S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}H, 0\\ R-H, q\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}\beta, \alpha\\ \gamma-\beta, \delta-\alpha\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}B, A\\ C-B, D-A\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\beta_r);(\alpha_q)\\ (a_\gamma);(b_\delta)\\ (e_C);(f_D)\end{matrix}\right|\begin{matrix}a(1+x)^{\lambda}\\ \\ b(1+x)^{\lambda}\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{2^{\sigma+\rho+1}\Gamma(\rho+n+1)}{(\lambda)^{\rho+1}}\times$$

$$S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}2\lambda+H, 0\\ R-H, q+2\lambda\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}\beta, \alpha\\ \gamma-\beta, \delta-\alpha\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}B, A\\ C-B, D-A\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(\lambda,\sigma+1),\triangle(\lambda,\sigma-\eta+1,(\beta_r);(\alpha_q),\triangle(\lambda,\sigma-\eta+n+1)\\ \triangle(\lambda,\rho+\sigma+n+2)\\ (a_\gamma)\quad;\quad(b_\delta)\\ (e_C)\quad;\quad(f_D)\end{matrix}\right|\begin{matrix}\frac{2^{\lambda}}{a^{-1}}\\ \\ \frac{2\lambda}{a^{-1}}\end{matrix}\right]$$

जहाँ $R(\rho)>-1$, $R(\sigma)>-1$, μ धन पूर्णांक है।

$$\beta\geqslant1,\ B\geqslant1,\ 2(H+\alpha+\beta)>(R+q+\gamma+\delta),\ 2(H+A+B)>(R+q+\gamma+\delta),$$

$$|\arg a|>\left(H+\alpha+\beta-\frac{R}{2}-\frac{q}{2}-\frac{\gamma}{2}-\frac{\delta}{2}\right)\pi,\ |\arg b|>\left(H+A+B-\frac{R}{2}-\frac{q}{2}-\frac{C}{2}-\frac{D}{2}\right)\pi,$$

$$R(1+\lambda b_j+\lambda f_j)>0$$

$$1\leqslant j\leqslant \alpha \quad 1\leqslant j\leqslant A \tag{3 4.1}$$

(3·4·1) की उपपत्ति (3·1·1) के ही तरह है।

विशिष्ट दशा:

$H=q=R=0$ मानने पर तथा फल (2·7) का उपयोग करने पर

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\rho}(1+x)^{\sigma} P_{n(x)}^{\rho,\,\eta} G_{\gamma,\,\delta}\left(a(1+x)^{\lambda}\Big|\begin{matrix}(a_{\gamma})\\(b_{\delta})\end{matrix}\right) G_{C,\,D}^{A,\,B}\left(b(1+x)^{\lambda}\Big|\begin{matrix}(e_C)\\(f_D)\end{matrix}\right) dx$$

$$=\frac{2^{\sigma+\rho+1}\Gamma(\rho+n+1)}{(\lambda)^{\rho+1}} \times$$

$$S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}2\lambda, & 0\\ 0, & 2\lambda\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}\beta, & a\\ \gamma-\beta, & \delta-a\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}B, & A\\ C-B, & D-A\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\triangle(\lambda,\sigma+1),\ \triangle(\lambda,\sigma-\eta+1);\ \triangle(\lambda,\sigma-\eta+n+1),\\ \triangle(\lambda,\rho+\sigma+n+2)\\ (a_{\lambda}) \quad ; \quad (b_{\delta})\\ (e_C) \quad ; \quad (f_D)\end{matrix}\right|\begin{matrix}2a^{\lambda}\\ \\ 2^{\lambda}b\end{matrix}\right]$$

जहाँ $R(\rho)>-1$, $R(\sigma)>-1$, λ धन पूर्णांक है

$$\beta\geqslant 1,\ B\geqslant 1,\ 2(a+\beta)>(\gamma+\delta),\ 2(A+B)>(C+D),$$

$$|\arg a|<\left((a+\beta)-\frac{\gamma}{2}-\frac{\delta}{2}\right)\pi,\ |\arg b|<\left(A+B-\frac{C}{2}-\frac{D}{2}\right)\pi,$$

$$R(1+\lambda b_j+\lambda f_j)>0$$

$$1\leqslant j\leqslant a \quad 1\leqslant j\leqslant A \tag{3·4·2}$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस शोधपत्र की तैयारी में डा० यू० सी० जैन ने पथप्रदर्शन किया जिसके लिये लेखक आभारी है।

निर्देश

1. कैम्प द फेरी। Functions hypergeometrique et Phypershperiques, polynomes d' Hermite.

2. एर्डेल्यी, ए०। Higher Transcendental functions. **भाग** I, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1953.

3. वही। Tables of integral Transform. **भाग** II, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क** 1953.

4. मैकराबर्ट, टी० एम०। Math. Annalen (1961), **142**, 450-452.

5. शर्मा, बी० एल०। Anneles de-la Societe Scientifique de Bruxelles, 1965, **7**, 26-40

5. वही। — Memoria Publicadaen Collectanea Mathematics, Vol. XVI-Fase. I-Ano. 1964, Seminario Matematico De Barcelona.

7. वही। — Seminario Mathematico De Barcelona.

8. वर्मा तथा भोंसले। — Legendra Function and Jacobi polynomials.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 4, October, 1973, Pages 223-230

फूरिये-जैकोबी श्रेणी की संकलनीयता $|R, \log n, 1|$ का स्थान-निर्धारण

आर० एस० चौधरी,
गणित विभाग, शासकीय महाविद्यालय, बड़वानी

[प्राप्त—मार्च 14, 1973]

सारांश

इस शोध पत्र का उद्देश्य यह सिद्ध करना है कि बिन्दु $x = +1$ पर फ़ूरिये-जैकोबी श्रेणी की संकलनीयता $|R, \log_n, 1|$ एक अस्थानीय गुणधर्म है और उन प्रतिबन्धों का पता लगाना है जिनके संतुष्ट होने पर यह एक स्थानीय गुणधर्म होगा ।

Abstract

Localisation relating to the summability $|R, \log n, 1|$ **of Fourier-Jacobi series.** *By* R. S. Choudhary, Department of Mathematics, Government College, Barwani, (M. P.).

The object of present paper is to prove that summability $|R, \log n, 1|$ of the Fourier-Jacobi series of $x = +1$ is not a local property and to investigate the conditions under which it can be ensured.

1. माना कि Σa_n एक अनन्त श्रेणी है जिसके आंशिक योगों का अनुक्रम $\{S_n\}$ है । हम

$$T_n = \frac{1}{\log n} \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \frac{S_\nu}{V}$$

लिखेंगे । यदि अनुक्रम $\{T_n\}$ परिसीमित विचरण का हो या दूसरे शब्दों में अनन्त श्रेणी

$$\Sigma\, |T_n - T_{n-1}|$$

अभिसारी हो तो श्रेणी Σa_n को परम संकलनीय $(R, \log n, 1)$ या संकलनीय $|R, \log n, 1|$ कहते हैं।

2. माना कि $f(x)$ अन्तराल $[-1, 1]$ में x के प्रत्येक मान के लिए इस प्रकार परिभाषित है कि

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} f(x)\, dx \tag{2·1}$$

AP 4

लेबेग की परिभाषा के अनुसार अभिसारी है । फलन $f(x)$ से सम्बन्धित फूरिये-जैकोबी श्रेणी निम्नलिखित है :

$$f(x)\sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_{n(x)}^{(\alpha,\beta)} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) \qquad (2\cdot2)$$

जिसमें

$$a_n = \frac{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}$$

$$\int_{-1}^{1} (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta} f(t)\, P_n^{(\alpha,\beta)}(t)dt$$

हमने माना है कि

$$W(\phi) = \left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{2\alpha}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{2\beta} f(\cos\phi) \qquad (2\cdot3)$$

हाल ही में गुप्ता[1] ने अन्तराल $[-1, 1]$ के सीमान्त बिन्दुओं पर श्रेणी (2·2) के लिए परम संकलनीयता के स्थान-निर्धारण सम्बन्धी विषय पर एक शोधपत्र प्रकाशित किया है । इस शोधपत्र के प्रमेय में उन्होंने यह सिद्ध किया है कि बिन्दु $x=+1$ पर श्रेणी (2·2) की संकलनीयता $|c, \frac{3}{2}+\alpha|$ एक अस्थानीय-गुणधर्म है अर्थात् वह बिन्दु $x=+1$ के लघु समीप्य में जनक फलन के व्यवहार पर निर्भर नहीं करती है । परम चिजारों संकलनीयता के सामंजस्य प्रमेय (2) के अनुसार यह स्पष्ट है कि श्रेणी (2·2) की संकलनीयता $|c, 1|$ एक अस्थानीय गुणधर्म है ।

इस शोधपत्र का उद्देश्य अन्तराल $[-1, 1]$ के बिन्दु $x=+1$ पर श्रेणी (2·2) के लिए, संकलनीयता $|R, \log n, 1|$ का स्थान निर्धारित करना है । प्रथम प्रमेय में हम यह सिद्ध करेंगे कि बिन्दु $x=+1$ पर श्रेणी की संकलनीयता $|R, \log n, 1|$ भी एक अस्थानीय गुणधर्म है । प्रश्न यह उठता है कि बिन्दु $x=+1$ पर श्रेणी (2·2) के सामान्य पदों पर क्या प्रतिबन्ध होना चाहिये, ताकि श्रेणी की संकलनीयता $|R, \log n, 1|$, बिन्दु $x=+1$ के लघु समीप्य में जनक फलन के व्यवहार पर निर्भर हो। दूसरे प्रमेय में हम इन्हीं प्रतिबन्धों का पता लगायेंगे, जिनके संतुष्ट होने पर श्रेणी की संकलनीयता $|R, \log n, 1|$ एक स्थानीय गुणधर्म होगा । संकलनीयता $|c, 1|$ से सम्बन्धित इसी प्रकार के प्रतिबन्धों पर लेखक[3] ने एक प्रमेय दिया है ।

हम निम्नलिखित दो प्रमेय सिद्ध करेंगे जो फ़ूरिये श्रेणी पर क्रमशः महन्ती[4] तथा भट्ट[5] के प्रमेयों के अनुरूप हैं ।

प्रमेय 1 : $-\frac{1}{2}\leqslant\alpha>\frac{1}{2}, \beta>-1$ के लिए बिन्दु $x=+1$ पर श्रेणी (2·2) की संकलनीयता $|R, \log n, 1|$ एक स्थानीय गुणधर्म नहीं है । यदि यह भी मान लिया जाय कि फलन $f(x)$ बिन्दुओं $x=+1$ तथा $x=-1$ के लघु समीप्य में शून्य है, तो भी यह आवश्यक नहीं है कि श्रेणी बिन्दु $x=+1$ पर $|R, \log n, 1|$ संकलनीय होगी ।

प्रमेय 2 : यदि

$$\Sigma_n \frac{|U_n(x)|}{n \log n} < \infty, \tag{2·4}$$

और $0<\alpha<\frac{1}{2}, \beta>0$ के लिए

$$\int_n^{\pi} \frac{|dw(\phi)|}{\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{\beta+1/2}} < \infty \tag{2·5}$$

हो, तो श्रेणी $\Sigma U_n(x)$ की संकलनीयता $|R, \log n, 1|$, बिन्दु $x=+1$ के लघु समीप्य में जनक फलन के व्यवहार पर निर्भर करेगी।

टिप्पणियाँ

1. ठीक इसी प्रकार के प्रमेय बिन्दु $x=-1$ के लिए भी दिये जा सकते हैं। इसके लिए हमें उपर्युक्त प्रमेयों में α तथा β प्राचलों में हेर-फेर करना होगा।

2. प्रमेय 1 के अनुसार यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि बिन्दु $x=+1$ पर श्रेणी (2·2) की संकलनीयतायें $|R, \log n, 1|$, $|R, \log \log \log n, 1|$... फलन के गुणधर्म पर निर्भर नहीं करती हैं।

3. यह बात विशेष रूप से ध्यान देने की है कि श्रेणी $\Sigma U_n(x)$ की संकलनीयता $|R, \log n, 1|$ के लिये

$$\Sigma \frac{U_n(x)}{n \log n} < \infty,$$

का होना एक आवश्यक प्रतिबन्ध है, जैसा कि प्रमेयिका 3 से विदित है।

3. यहाँ हम विभिन्न लेखकों द्वारा सिद्ध किये गये कुछ ऐसे परिणामों को उद्धृत कर रहे हैं, जिनकी हमें आगे चलकर आवश्यकता पड़ेगी।

प्रमेयिका[6] 1 : माना कि $f_n(x)$, $n=1, 2...$ अन्तराल $[a, b]$ पर एक मापनीय फलन है, जहाँ कि $b-a\leqslant\infty$ तो फलन $f_n(x)\,\phi(x)$, $n=1, 2...$ के, अन्तराल $[a, b]$ पर समाकलन होने तथा श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_a^b f_n(x)\phi(x)\,dx\right|$$

के अभिसारी होने के लिये आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध यह है कि $\Sigma|f_n(x)|$ आवश्यक रूप से परिसीमित हो।

प्रमेयिका[4] 2 : यदि श्रेणी

$$\Sigma \frac{|S_n|}{n \log n} \tag{3·1}$$

अभिसारी है, तो अनुक्रम $\{S_n\}$ संकलनीय $|\overline{R, \log n}, 1|$ होगा ।

प्रमेयिका[4] 3 : यदि श्रेण ΣC_n संकलनीय $|R, \log n, 1|$ है, तो श्रेणी

$$\Sigma \frac{|C_n|}{n \log n} \tag{3·2}$$

अभिसारी होगा ।

प्रमेयिका[7] 4 : $\alpha, \beta > -1$ तथा $0 < \phi < \pi$ के लिये

$$P_{n(\cos \phi)}^{\alpha,\beta} = \frac{2C_n}{\pi\sqrt{(2 \sin \phi)}}\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{-\alpha}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{-\beta}$$

$$\left[\cos\left\{\phi\left(n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)-\frac{\pi}{2}(\alpha+\tfrac{1}{2})\right\}+\frac{O(1)}{n \sin \phi}\right] \tag{3·3}$$

जिसमें कि

$$C_n = \frac{\Gamma\frac{1}{2}\,\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+\frac{3}{2})} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

प्रमेयिका[7] 5 : यदि α तथा β स्वेच्छ वास्तविक अचर हैं तो

$$P_n^{\alpha+1,\beta}(x) = \frac{2}{(2n+\alpha+\beta+2)} \frac{(n+\alpha+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-(n+1)\,P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{(1-x)} \tag{3·4}$$

और

$$(2n+\alpha+\beta+2)(1-x^2)\frac{d}{dx}\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (n+\alpha+\beta+1)\Big[\{(2n+\alpha+\beta+1)x$$

$$+(\alpha-\beta)\}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-2(n+1)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\Big] \tag{3·5}$$

(3·4) और (3·5) को मिलाने पर हमें निम्नलिखित सूत्र मिलेगा :

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(1+x)}{(n+\alpha+\beta+1)}\frac{d}{dx}\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)+P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{3·6}$$

प्रमेयिका 6 : यदि $\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$, $\beta \geqslant -\frac{1}{2}$, तो $0 < \phi < \pi$ में समान रूप से

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos \phi) = O\left[n^{-1/2}\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{-\alpha-1/2}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{-\beta-1/2}\right] \tag{3·7}$$

यह परिणाम $0<\phi\leqslant\pi/2$ के लिये, झेगो[8] के सम्बन्ध (7.32.5) से स्पष्ट है तथा α और β के हेरफेर से $\pi/2<\phi<\pi$ के लिये उपयुक्त हो जाता है।

4. प्रमेय 1 की उपपत्ति :

प्रमेयिका 3 को दृष्टि में रखते हुए यह दिखाना पर्याप्त होगा कि अन्तराल $[a, b](0<a<b<\pi)$ पर समाकलनीय एकफलन $F(\phi)$ इस प्रकार है कि

$$I=\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(2n+\alpha+\beta+1)}{n\log n}\; P_n^{(\alpha,\beta)}(1)\int_a^b F(\phi)(1-\cos\phi)^{\alpha}\right.$$

$$\left.(1+\cos\phi)^{\beta}P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\phi)\sin\phi\, d\phi\right|=\infty,$$

जहाँ
$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\binom{n+\alpha}{n}\sim n^{\alpha}.$$

प्रमेयिक 4 से :

$$I\geqslant\sum_{n=2}^{\infty}2^{\alpha+\beta+1}\left|\frac{(2n+\alpha+\beta+1)}{n\log n}\, n^{\alpha}\int_a^b F(\phi)\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{2\alpha}\right.$$

$$\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{2\beta}\sin\phi\,\frac{C_n}{\pi\sqrt{(2\sin\phi)}}\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{-\alpha}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{-\beta}\cos\left[\phi\left(n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\pi}{2}(\alpha+\tfrac{1}{2})\right]d\phi\right|-\sum_{n=2}^{\infty}2^{\alpha+\beta+1}\left|\frac{(2n+\alpha+\beta+1)}{n\log n}n^{\alpha}\int_a^b F(\phi)\right.$$

$$\left.\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{2\alpha}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{2\beta}\sin\phi\,\frac{C_n}{\pi\sqrt{(2\sin\phi)}}\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{-\alpha}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{-\beta}O\left(\frac{1}{n\sin\varphi}\right)d\phi\right|$$

= माना कि $I_{1,1}-I_{1,2}$,

अब

$$I_{1,2}=\Sigma O\left\{\frac{n^{\alpha+1}}{n\log n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$$

$$=O(1)\Sigma 1/n^{3/2-\alpha}\log n$$

$$=O(1),\text{ क्योंकि } -\tfrac{1}{2}\leqslant\alpha<\tfrac{1}{2}.$$

हम यह भी पाते हैं कि

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(2n+\alpha+\beta+1)}{n\log n}\; n^{\alpha}C_n\cos\left[\phi\left(n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)-\frac{\pi}{2}(\alpha+\tfrac{1}{2})\right]\right|$$

$$\geqslant \tfrac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+\alpha+\beta+1}{n \log n} n^{\alpha} C_n - \tfrac{1}{2} \Bigg| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n+\alpha+\beta+1)}{n \log n}$$

$$n^{\alpha} C_n \cos 2\left[\phi\left(n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)-\frac{\pi}{2}(\alpha+\tfrac{1}{2})\right]\Bigg| = \infty.$$

अतः प्रमेयिका 1 से यह स्पष्ट हो जाता है कि एक ऐसा फलन $F(\phi)$ सम्भव है जिसके लिये $I_{1,1}\to\infty$ जैसे $n\to\infty$ इस प्रकार प्रमेय उत्पन्न हो जाता है ।

5. प्रमेय 2 की उपपत्ति :

(2·2) से

$$[U_n(x)]_{x=\cos\theta} = \frac{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \int_0^{\pi} (1-\cos\phi)^{\alpha}$$

$$(1+\cos\phi)^{\beta} f(\cos\phi)\; P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\phi) P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) \sin\phi\, d\phi. \tag{5·1}$$

अतः बिन्दु $x=+1$ पर

$$U_n(1) = \frac{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}$$

$$\int_0^{\pi} (1-\cos\phi)^{\alpha}(1+\cos\phi)^{\beta} f(\cos\phi)\; P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\phi) \sin\phi\, d\phi.$$

आव्रेशकाफ[7] का अनुसरण करते हुए

$$S_n(1) = 2^{\alpha+\beta+1} k_n \int_0^{\pi} \left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{2\beta+1} f(\cos\phi)\; P_n^{(\alpha+1,\beta)}(\cos\phi)\, d\phi,$$

जहाँ

$$k_n = \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\beta+1)} \simeq \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha+1)} n^{\alpha+1}.$$

(3·6) का उपयोग करने पर

$$S_n(1) = \frac{2^{\alpha+\beta}}{(n+\alpha+\beta+1)} k_n \int_0^{\pi} \left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{2\alpha} \left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{2\beta} \sin\phi\, f(\cos\phi)$$

$$(1+\cos\phi)\left\{\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}_{x=\cos\phi} d\phi + 2^{\alpha+\beta+1} k_n$$

$$\int_0^{\pi} \left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{2\beta+1} f(\cos\phi)\; P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\phi)\, d\phi.$$

अब

$$\int_0^\pi \left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{2\alpha}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{2\beta} f(\cos\phi)(1+\cos\phi)\left\{\sin\phi\left(\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}x=\cos\phi\right.$$

$$=-\int_0^\pi W(\phi)(1+\cos\phi)\left\{\frac{d}{d\phi}P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\phi)d\phi\right\}$$

$$=-\int_0^\pi W(\phi)\sin\phi\; P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\phi)d\phi+\int_0^\pi(1+\cos\phi)\;P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\phi)\;dW(\phi).$$

अतः

$$S_n(1)=\frac{2^{\alpha+\beta}}{(n+\alpha+\beta+1)}k_n\int_0^\pi(1+\cos\phi)\;P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\phi)dW(\phi)$$

$$+2^{\alpha+\beta+1}k_n\left\{1-\frac{1}{(n+\alpha+\beta+1)}\right\}\int_0^\pi\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{2\beta+1}$$

$$f(\cos\phi)\;P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\phi)d\phi$$

$$=\frac{2^{\alpha+\beta}}{(n+\alpha+\beta+1)}k_n\int_0^\eta(1+\cos\phi)\;P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\phi)\;dW(\phi)$$

$$+\frac{2^{\alpha+\beta}}{(n+\alpha+\beta+1)}k_n\int_\eta^\pi(1+\cos\phi)\;P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\phi)\;dW(\phi)$$

$$+2^{\alpha+\beta+1}k_n\left(\frac{n+\alpha+\beta}{n+\alpha+\beta+1}\right)\int_0^\pi\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{2\beta+1}$$

$$f(\cos\phi)\,P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\phi)\;d\phi$$

=माना कि $S_{n,1}+S_{n,2}+S_{n,3}$, जहाँ कि η एक छोटा नियत अचर है ।

अनुक्रम $\{S_n(1)\}$ संकलनीय $|R, \log n, 1|$ होगा यदि अनुक्रम $\{S_{n,1}\}\{S_{n,2}\}$ और $\{S_{n,3}\}$ संकलनीय $|R, \log n, 1|$ हो । प्रमेयिका 7 को दृष्टि में रखते हुए तथा प्राक्कलन के अनुसार

$$\Sigma\frac{|S_{n,3}|}{n\log n}=O(1)\Sigma_n\frac{|U_n(1)|}{n\log n}=O(1).$$

अतः प्रमेय को सिद्ध करने के लिये यह दिखाना पर्याप्त होगा कि अनुक्रम $\{S_{n,2}\}$ संकलनीय $|R, \log n, 1|$ है । प्रमेयिका 2 के अनुसार यह तब होगा, जब हम यह सिद्ध करें कि

$$\Sigma\frac{|S_{n,2}|}{n\log n}<\infty.$$

अब प्रमेयिका 6 का उपयोग करने पर

$$\Sigma \frac{|S_{n,2}|}{n \log n} = O(1) \Sigma \frac{1}{n^{3/2-\alpha} \log n} \int_{\eta}^{\pi} \frac{|dW(\phi)|}{\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{\alpha+1/2} \left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{\beta+1/2}}$$

$$= O(1) \Sigma \frac{1}{n^{3/2-\alpha} \log n}, \text{ (2·5) से}$$

$$= O(1), \text{ क्योंकि } 0 < \alpha < \tfrac{1}{2}.$$

इस प्रकार प्रमेय उपपन्न हो जाता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक प्रोफेसर धर्मप्रकाश गुप्ता का आभारी है जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में मार्ग-दर्शन किया।

निर्देश

1. गुप्ता, डी० पी०। जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०, 1971, **4**, 337-345.
2. कोगबेतलियाँज, ई०। बुल० डेस साइन्सेस माथेमाटिक, 1925, **49**, 234-256.
3. चौधरी, आर० एस०। विक्रम साइंस जर्न० (प्रकाशनीय)
4. महन्ती, आर०। जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०, 1950, **25**, 67-78.
5. भट्ट, एस० एन०। तोहोकु मैथमेटिकल जर्न०, 1959, **11**, 13-19.
6. बोभान्की, एल० एस० तथा केस्टलमेन, एच०। प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०, 1939, **45**, 88-97.
7. आब्रेश्काफ, एन०। सोफिया युनिवर्सिटी जर्न०, 1939, **1**, 39-133.
8. भेगो, जी०। आर्थोगोनल पालिनामियल्स, 1959.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 4, October, 1973, Pages 231-234

उत्तर प्रदेश का क्षारीय मृदाओं में प्राप्य सीसा

शिवगोपाल मिश्र तथा गिरीश पाण्डेय
कृषि रसायन अनुभाग, रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—अक्टूबर 1, 1973]

सारांश

उत्तर प्रदेश के 14 जिलों के औद्योगिक क्षेत्रों एवं सड़कों के पार्श्व की क्षारीय मिट्टियों के सतही नमूने लिये गए जिनमें विनिमेय सीसा की मात्रा ज्ञात की गई। इन मिट्टियों में प्राप्य सीसा 0 से 0·88 अंश दस लक्षांश तक पाया गया। मृदा के रासायनिक गुणों, जैसे पी-एच, कैल्सियम कार्बोनेट कार्बनिक कार्बन तथा प्राप्य सीसा के मध्य प्रतिलोमानुपाती सम्बन्ध पाया गया।

Abstract

Lead as a trace element in saline-alklali soils of Uttar Pradesh. *By* S. G. Misra and G. Pandey, Agricultural Chemistry Section, Chemistry Department, University of Allahabad, Allahabad.

Suface soil samples from saline-alkali tracts of fourteen districts of U. P. were collected. These samples were taken from the road sides covering cultivated and industrial areas of U. P. and analysed for their exchangeable lead. These soils contained 0 to 0·88 ppm avaliable Pb. It was observed that available lead varied inversely with $CaCO_3$, organic C and pH values of the soils.

यद्यपि सीसा पौधों के लिए आवश्यक तत्व नहीं है किन्तु यदि पौधों एवं मिट्टियों में इसकी अधिकता हो तो विषैला प्रभाव पड़ता है। सड़कों के आस-पास जहाँ से अत्यधिक वाहन गुजरते हैं एवं औद्योगिक क्षेत्रों के आस-पास वाहनों से निकलने वाले धुओं के शोषण एवं उससे निकले पेट्रोल में निहित टेट्राएथिल लेड के होने से अधिक सीसा पाये जाने को सम्भावना रहती है। इस प्रकार मानव एवं पशुजींवन पर सीसे की अधिक मात्रा का बहुत हानिकारक प्रभाव पड़ता है [विल्सन (1962) कैनान एवं वोलेस (1962)]। स्पष्टतः सीसा सभी जीवधारियों के लिए विषाक्त है।

सारणी 1

बिभिन्न मिट्टियों में उपलब्ध सीसे की मात्रा (ग्रंश प्रति दसलक्षांश)

जिले जहां से नमूने लिए गये	नमूनों की संख्या	पी-एच परास	$CaCO_3$% परास	कार्बनिक कार्बन% परास	विनिमेय सीसा
1. बलिया	4	7·9-9·7 (8·6)	4·6-11·3 (7·9)	0·182-1·820 (1·001)	0·04-0·88 (0·27)
2. गाजीपुर	4	8·1-9·4 (8·6)	3 2-6·3 (4·5)	0·611-1·371 (0·577)	0·04-0·48 (0·21)
3. मिर्जापुर	1	8·0	4·0	3·172	0·20
4. फतेहपुर	5	8·1-8·7 (8·4)	2·5-9·4 (5·2)	0·783-1·612 (1·20·6)	0·08-0·32 (0·18)
5. आजमगढ़	3	8·0-8·1 (8·0)	1·3-5·3 (3·0)	0·564-3·276 (1·696)	0·08-0·40 (0·19)
6. वाराणसी	4	7·4-8·4 (7·9)	1·1-4·0 (2·2)	0·260-5·746 (1·976)	0·12-0·24 (0·18)
7. लखनऊ	8	8·1-9·6 (8·3)	3·7-9·6 (6·55)	0.288-1·872 (1·622)	0·08-0·32 (0·18)
8. रायबरेली	6	8·0-8·7 (8·3)	5·5-9·7 (7·65)	0·725-2·028 (1·257)	0·08-0·20 (0·14)
9. प्रतापगढ़	5	8·1-8·5 (8·2)	4·1-9·6 (7·9)	0.612-2·080 (1·150)	0·04-0·48 (0·14)
10. जौनपुर	1	8·3	2·3	0·276	0·12
11. कानपुर	8	7·6-8·5 (8·11)	2·1-11·7 (6·3)	0·5·72-1·092 (0·883)	0·04-0·20 (0·113)
12. उन्नाव	6	7·6-9·7 (9·0)	1·3-9·0 (5·8)	0·286-1·040 (0·607)	0·04-0·20 (0·1)
13. इलाहाबाद	4	7·4-9·4 (8 6)	1·3-11·3 (7·0)	0·884-3·562 (2·190)	0·04-0·16 (0·11)
14. सुल्तानपुर	6	8·0-9·3 (8·5)	1·1-7·1 (3·1)	0·312-1·222 (0·712)	0·0-0·12 (0 05)

कोष्टकों में मध्यमान दिए गए हैं ।

लैकनेन (1967) के अनुसार अम्लीय मिट्टियों में सीसा की अधिक विलेयता के कारण पौधों को अधिक सीसा प्राप्त होता है जिससे इन पौधों को चरने वाले पशुओं में भयंकर रोग उत्पन्न होते हैं। हेमाण्ड तथा एरोसान (1964) और मार्टन एवं हेमाण्ड (1966) ने सूचित किया कि यदि पशुओं के सूखे चारे में 150 अंश Pb/दशलक्षांश हो तो वह बहुत ही विषाक्त होता है।

संसार का मिट्टियों में 5-50 अंश सीसा पाया गया है (स्वेन 1955)। अभी तक भारतवर्ष की मिट्टियों में न तो सीसे की कुल मात्रा की और न उपलब्ध मात्रा की सूचना प्राप्त है। इसी दृष्टि से हमने क्षारीय मिट्टियों में लेश तत्वों की उपलब्धि ज्ञात करते समय इन मिट्टियों में उपलब्ध सीसे की मात्रा भी ज्ञात करना उचित समझा।

प्रयोगात्मक

सीसे के अध्ययन के लिये उत्तर प्रदेश के 14 जिलों से मिट्टियों के 65 नमूने इकठ्ठे किए गए। ये नमूने औद्योगिक क्षेत्रों एवं सड़कों के पार्श्व से लिए गए। विशेषतया जहां पेट्रोल टंकियां वनी हैं, उनके आस-पास के नमूने लिए गए हैं। इन सतही नमूनों को सुखा कर पीस लिया गया। इनका विश्लेषण पी-एच, कैल्सियम कार्बोनेट, कार्बनिक कार्बन तथा विनिमेय सीसा के लिए किया गया।

मिट्टियों मे विनिमेय सीसा निष्कर्षित करने के लिए *N* अमोनियम ऐसीटेट मिला कर हिलाया गया। दूसरे दिन सेन्ट्रीफ्यूज करने के बाद छनित से 25 मि०ली० लेकर सीसा की मात्रा डाइथिजोन विधि (सैंडिल 1937) द्वारा ज्ञात की गयी।

विवेचना

मिट्टियों के कुछ रासायनिक गुणधर्म सारणी 1 में दिये गए हैं। इनसे यह स्पष्ट हो जाता है कि सभी मिट्टियां अल्पक्षारीय या क्षारीय हैं। इनमें $CaCO_3$ तथा कार्बन की भी मात्रा अधिक है। जो नमूने पेट्रोल टंकियों के आस-पास से लिए गए हैं वे देखने में काले तथा उच्च कार्बन युक्त हैं।

हमने अमोनियम ऐसीटेट को ही निष्कर्षण के लिए इसलिए चुना क्योंकि अधिकांश सूक्ष्ममात्रिक तत्वों की प्राप्य मात्रायें इसी के प्रयोग से ज्ञात की जाती हैं। यह विनिमेय Pb को ही विलयित रख सकता है अतः जो भी आंकड़े प्राप्त हुए हैं वे विनिमेय Pb के होंगे। इन मिट्टियों में विनिमेय Pb की मात्रा सुल्तानपुर जिले में सबसे कम (0·05 अंश) और बलिया जिले में सबसे अधिक (0·27 अंश) पायी गयी। यह भी स्पष्ट है कि पूर्वी क्षेत्रों में उपलब्ध सीसा की मात्रा अधिक है और पश्चिमी क्षेत्रों में कम।

उत्तर प्रदेश के 14 जिलों में प्राप्य सीसा की मात्रायें निम्न क्रम में पायी गयीं :

बलिया (0·27 अंश) > गाजीपुर (0·21 अंश) > मिर्जापुर (·20 अंश) > फतेहपुर (0·19 अंश) > आजमगढ़ (0·19 अंश) > वाराणसी (0·18 अंश) > लखनऊ (0·18 अंश) > रायबरेली (·14 अंश) > प्रतापगढ (0·14 अंश) > जौनपुर (·12 अंश) > कानपुर (·11·1 अंश) = उन्नाव (0·11 अंश) > इलाहाबाद (0·11 अंश) > सुल्तानपुर (0·05 अंश)।

सारणी 1 में दिए गए मिट्टियों के रासायनिक गुणधर्मों—पी-एच, $CaCO_3$ एवं कार्बनिक कार्बन से स्पष्ट है कि ये तीनों कारक सम्मिलित रूप से सीसे की उपलब्धता पर प्रभाव डालते हैं।

निर्देश

1. सैण्डेल, ई० वी० । Colorimetric Determination of Traces of Metals इंटरसाइंस पब्लिशर्स (1937), न्यूयार्क
2. विल्सन, ए० एल० । Scott. Ag, 1962, **42**, 87
3. कैनान, एच० एल० तथा वोलेस, जे० एम० । Acta Agric. 1967, **17**, 131
4. लेकनैन, ई० । Acta Agric, 1967, **17**, 131
5. हैमाण्ड पी० वी० तथा एरोसान, ए० एल० । Ann. N. Y. Acad. Sc., 1964, **3**, 595
6. मार्टन, जी० सी० तथा हैमाण्ड, पी० वी० । Agron. J., 1964, **58**, 553
7. स्वेन, डी० जे० । Techn. Comm. No 48 Commonwealth Bur Soil Sci. 1955
8. मैक्लीन, ए० जे० तथा अन्य । Finn. B. J. Can. J., स्वायल सा० (1969) 47: 327

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No 4, October 1973, Pages 235-251

पश्चिमी सोन घाटी के कार्बोनेट अवसादों का अध्ययन

राय अवधेश कुमार श्रीवास्तव तथा महाराज नारायण महरोत्रा
भौमिकी विभाग, काशी हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी-221005

[प्राप्त—मई 12, 1973]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र उत्तर प्रदेश तथा मध्य प्रदेश की सीमा में फैले हुये एक अविकसित क्षेत्र में विद्यमान चूना पत्थरों के सम्भावित औद्योगिक उपयोगों से सम्बन्धित है। यहां विन्ध्य परा संघ के रोहतास तथा फान चूना पत्थर विगोपित हैं। इन कार्बोनेट शैलों के स्थूल एवं सूक्ष्मदर्शीय अध्ययन, रासायनिक विश्लेषण, अविलेय अवशेषों, विभेदक तापीय विश्लेषण (D.T.A.) तथा अवरक्त अध्ययनों (I. R.) से ज्ञात हुआ है कि रोहतास चूना पत्थर विशुद्ध कैल्सियम कार्बोनेट ($CaCO_3$—85%) माइक्राइट है तथा फान चूना पत्थर कैल्सियम-मैग्नीशियम कार्बोनेट ($Ca Mg (CO_3)_2$—75%) डोलोमाक्रोस्पैराइट है। इनमें से पहले का उपयोग सीमेंट बनाने तथा चूना तैयार करने में किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त लौह उद्योग की वात्या भट्ठियों में भी यह गालक के रूप में काम में लाया जा सकता है। विनिर्देशों के अनुसार यह कागज उद्योग के लिये भी उपयुक्त है। जल-उपचार, कृषि तथा खाद उद्योग आदि के लिये भी यह चूना पत्थर उपयोगी है। इसके विपरीत फान चूना पत्थर सड़क-एस्फाल्ट के रूप में प्रयोग किया जा सकता है।

Abstract

Studies of the carbonate sediments of Western Son valley. *By* R. A. K. Srivastava and M. N. Mehrotra, Department of Geology, Banaras Hindu University, Varanasi-221005.

The present paper deals with the possible industrial uses of the carbonate rocks exposed in a remote area on the border of U. P. and M. P. The Rohtas limestone and Faun limestone of the Vindhyan Supergroup are found exposed in the area under investigation.

The megascopic and microscopic studies, chemical analyses, insoluble residue, D.T.A. and IR studies reveal that Rohtas limestone contains high percentage (85%) of $CaCO_3$ and is micritic in nature, while the Faun limestone is dolomicrosparite with Ca Mg $(CO_3)_2$ more than 75%. The former may be used in cement, lime, paper and in blast furnaces. It is also suitable for water-treatment, agriculture and fertilizer industries. The Faun limestone can be suitably used as road asphalt.

निम्न विन्ध्य शैलों के भौमिकीय अध्ययन के लिये सोन घाटी हमारे देश की सर्वोत्तम प्राकृतिक स्थली है। यहां निम्न विन्ध्य शैल समूह, जिन्हें सेमरी संघ भी कहा जाता है, अविघ्न रूप से स्तृतीय-क्रम में विगोपित है। अश्म-विज्ञान की दृष्टि से इनके अन्तर्गत संगुटिकाश्म, पॉरसेलेनाइट, शेल, बलुआ पत्थर तथा चूना पत्थर के शैल संस्तर आते हैं।

प्रस्तुत शोध पत्र में मिर्जापुर (उ० प्र०) तथा सिधी (म० प्र०) के लगभग 200 वर्ग कि०मी० मापित क्षेत्र (82°45′ से 83°0′ देशान्तरों एवं 24°30′ से 24°42′ अक्षांशों के बीच का क्षेत्र) में विद्यमान कार्बोनेट शैलों का वर्णन किया गया है तथा विभिन्न उद्योगों में उनके उपयोगों की संभावनाओं का आर्थिक मूल्यांकन प्रस्तुत किया गया है।

पूर्ववर्ती-कार्य: विन्ध्य परा संघ के शैलों का वैज्ञानिक अध्ययन आज से लगभग एक शताब्दी पूर्व प्रारम्भ हुआ था। सर्वप्रथम थायस ओल्डम नें (1859) विन्ध्य शैलों का अध्ययन कर उन्हें तीन श्रेणियों में विभक्त किया। तदनन्तर मेडलिकाट (1860) तथा मैलट (1869) ने इन शैलों की भौमिकीय समीक्षा प्रस्तुत की। अवसादनी की दृष्टि से इस क्षेत्र में सर्वाधिक महत्वपूर्ण कार्य आडेन (1933) का है जिन्होंने इन शैलों का विस्तृत अध्ययन कर, उनके उद्‌गम की विवेचना प्रस्तुत की। विन्ध्य शैलों पर किये गये पूर्ववर्ती कार्यों की समीक्षा मिश्रा (1969) ने भारतीय विज्ञान कांग्रेस के भौमिकी प्रभाग में दिये गये अपने अध्यक्षीय भाषण में की है। पिछले वर्षों से विभिन्न विश्वविद्यालय, तेल तथा प्राकृतिक गैस आयोग एवं भारतीय भौमिकीय सर्वेक्षण विभाग भी इन अवसादों के अध्ययन में लगे हुये हैं।

प्रयोगात्मक

क्षेत्र-स्तृती

प्रस्तुत शोध क्षेत्र में कार्बोनेट शैलों के दो एकक मिलते हैं, जिन्हें फान चूना पत्थर तथा रोहतास चूना पथरर की संज्ञा दी गई है। इनका स्तृती क्रम तथा स्थिति सारणी 1 में दिया गया है।

सारणी 1

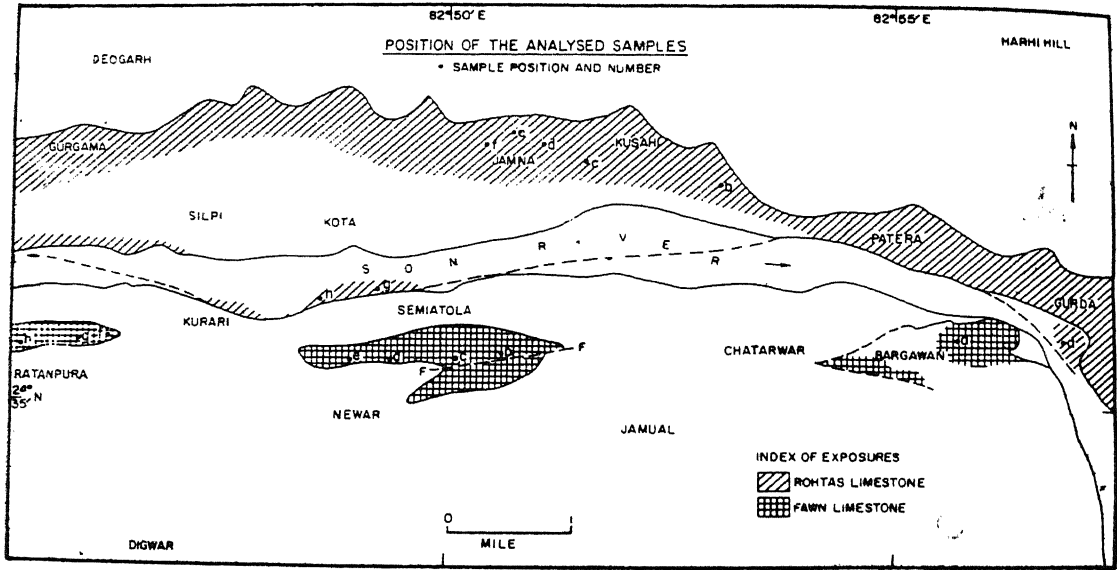
शोध क्षेत्र का स्तृती-क्रम

परासंघ	संघ	अव संघ	शैलसमूह	सदस्य
विंध्य	कैमूर	उपरि कैमूर	धन्घोल आर्थोक्वार्टज़ाइट स्कार्प उप-ग्रेवाके	
		निम्न कैमूर	विजयगढ़ शेल उपरि आर्थोक्वार्टज़ाइट	
	सेमरी		रोहतास चूना पत्थर	रोहतास चूना पत्थर
		खेन्जुआ	ग्लूकोनाइटिक बलुआ पत्थर फान चूना पत्थर जैतून हरित शेल	
			पॉरसेलेनाइट इत्यादि	

पूर्व-विन्ध्य शैल समूह : विजावर तथा नाइसी ग्रेनाइट

क्षेत्र में कार्बोनेट शैलों का वितरण

प्रस्तुत शोध क्षेत्र में फान चूना पत्थर सोन नदी के दक्षिण तटीय भागों में विगोपित हैं (चित्र 1)। इनकी सामान्य अनुदैर्ध्य दिशा पूर्व-पश्चिम तथा नति 10° से 25° तक उत्तर की ओर है। इस चूना पत्थर के उत्तम दृश्यांश बरगांवां (24°35′ : 82°55′), सेमिया टोला तथा रतनपुरा (24°35′ : 82°45′) गांवों के आस-पास के इलाकों में मिलते हैं। चूना पत्थरों के संस्तरों की मोटाई 50 से०मी० से लेकर एक मीटर से अधिक तक है तथा सम्पूर्ण मोटाई लगभग 100 मीटर है।

रोहतास चूनापत्थर सेमरी संघ का सबसे ऊपरी शैल समूह है। इस चूना पत्थर के अनावरण मुख्यत: सोना नदी के उत्तरी किनारे की ओर कैमूर पहाडियों के दक्षिणी कगारों में गुरगांवां (24°37′ : 82°50′) तथ गुरदा (24°36′ : 82°59′) के मध्य पाये गये हैं (चित्र 1)। फान चूना पत्थर के समान इनकी भी अनुदैर्ध्य दिशा पूर्व-पश्चिम है तथा नति 10° से 50° तक उत्तर की ओर है। इस चूना पत्थर के संस्तरों की मोटाई 30 से०मी० से लेकर एक मीटर तक तथा सम्पूर्ण मोटाई 120 मीटर के लगभग है।

चित्र 1. फान चूनापत्थर तथा रोहतास चूनापत्थर ये क्षत्रीय विगोपन ।
$a-h$ विश्लेषित प्रतिदर्शों की स्थिति दर्शाते हैं ।

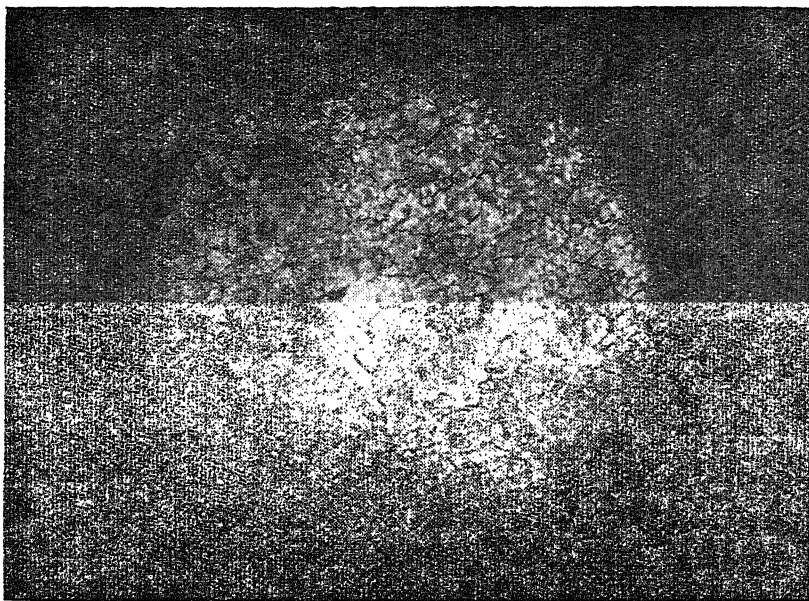
फान चूना पत्थरों में बिद्यमान 'स्ट्रोमेटोलाइटी' संरचनायें विशेष रूप से उल्लेखनीय हैं । ये संरचनायें सामान्यत: शंकु आकृति दर्शाती हैं जिनमें चर्ट और कार्बोनेट की एकान्तर पट्टियां दिखाई देती हैं (इनका विवेचन अन्यत्र किया जायेगा) । इन संरचनाओं के अतिरिक्त फान चूनाश्मों के संस्तरों में छोटे पैमाने पर बलन दिखाई देते हैं तथा कहीं कहीं तरंग चिन्ह भी दृष्टिगोचर होते हैं ।

रोहतास चूनाश्मों में भी लघु बलन विद्यमान हैं तथा कहीं कहीं पर 'स्टाइलोलाइट' संरचना दिखाई देती है । बिभेदक अपक्षय के परिणामस्वरूप इन शैलों में यत्र-तत्र प्रोदबर्ध (Protubrance) विकसित हुये हैं जो रंग भेद के कारण क्षेत्र में स्पष्टतया दिखाई देते हैं ।

शैल वर्णना

फान चूना पत्थर: यह शैल अपने हल्के पीतबभ्रु रंग के कारण क्षेत्र में सरलता से पहचाने जाते हैं । आडेन (1933) ने इसी रंग (यथा अंग्रेजी में फान रंग) के आधार पर इनका नामकरण किया । ये चूनाश्म सिलिकामय तथा चर्टमय हैं । क्षेत्र में इन शैलों पर डोलोमाइटीभवन सिलिकाभ प्रक्रियाओं के विभिन्न प्रभाव स्पष्ट दिखाई देते हैं । इन चूना पत्थरों की ऊपरी सतह अपक्षय के परिणामस्वरूप हाथी के चमड़े के समान दिखाई देती है, जैसा डोलोमाइट शैलों में बहुधा देखने को मिलता है ।

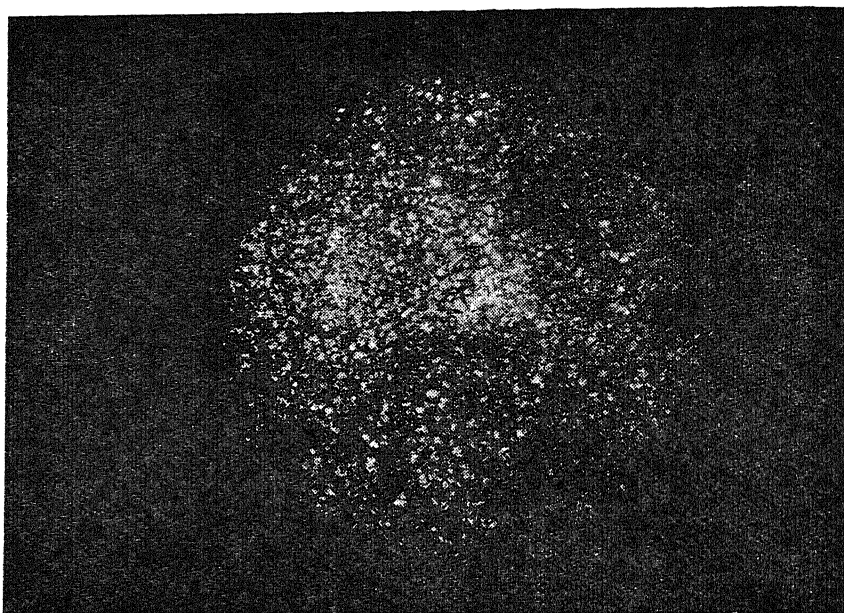
विभेदक तापीय विश्लेषण (D.T.A.) तथा अवरक्त अध्ययन (I. R.) से इस बात की पुष्टि हुई है कि इन शैलों का प्रमुख कार्बोनेट डोलोमाइट है ।

सूक्ष्मदर्शीय अध्ययन करने पर ज्ञात होता है कि ये शैल मुख्यत: डोलोमाइक्रोस्पेराइट (बिसेल तथा चिलन्जर 1967) प्रकृति के हैं जिनमें डोलोमाइक्रोस्पार (10 से 15 माइक्रोन तक) की मात्रा डोलोमाइक्राइट (4 माइक्रोन तक) से अधिक है। डोलोमाइक्रोस्पार कणों के बीच के रिक्त स्थानों को डोलोमाइक्राइट ने ग्रहण कर रखा है (चित्र 2)। कुछ पतले काटों में डोलोमाइक्रोस्पार कण एक दूसरे के अत्यधिक समीप हैं। इसके अतिरिक्त क्वार्ट्ज के सूक्ष्म कण भी दिखाई देते हैं जिनमें सामान्यत: तरंग विलोप विद्यमान है। ग्लूकोनाइट तथा बायोटाइट खनिज अत्यल्प मात्रा में मिलते हैं। अपारदर्शी खनिज मैग्नेटाइट तथा हीमैटाइट के कण भी कुछ पतले काटों में मिले हैं।

चित्र 2. फान चूनापत्थर × 90

रोहतास चूना पत्थर: इन शैलों का रंग साधारणतया धूसर है। क्षेत्र में ये शैल उत्तम ढंग से संस्तरित हैं।

विभेदक तापीय विश्लेषण तथा अवरक्त अध्ययन से ज्ञात हुआ है कि इन शैलों का प्रमुख कार्बोनेट कैल्साइट है।

इन चूनाश्मों के सूक्ष्मदर्शीय अध्ययन से ज्ञात होता है कि ये मुख्यत: माइक्राइटिक (बिसेल तथा चिलन्जर 1967) प्रकृति के हैं अर्थात् इन शैलों के अधिकतर कार्बोनेट कण 5 माइक्रोन तक हैं (चित्र 3)। यदाकदा इनमें कुछ बड़े आकार के कण भी मिलते हैं।

ऊपर वर्णित अध्ययन के आधार पर इन शैलों को 'माइक्राइट' की संज्ञा दी गयी है।

चित्र 3. रोहतास चूना पत्थर × 90

रासायनिक विश्लेषण

चूना पत्थरों के रासायनिक संघटन की जानकारी उनकी आर्थिक उपयोगिता के मूल्यांकन के लिये अति महत्वपूर्ण है। क्षेत्रीय चूना पत्थरों के रासायनिक विश्लेषण के लिये मुख्यत: प्रतिदर्श विगोपित संस्तरों से लिये गये हैं। प्रस्तुत शोध क्षेत्र की स्थिति दुर्गम है। यहां न तो खुली खदानें ही विद्यमान हैं और न तो मार्ग-परिच्छेद (road sections) ही। वेधन (drilling) करके प्रतिदर्श इकठ्ठ करने की सुविधा भी प्राप्त नहीं थी अत: दृश्यांशों से प्रतिदर्श एकत्र करते समय इस बात का विशेष ध्यान रखा गया है कि वे सम्पूर्ण दृश्यांशों का उचित प्रतिनिधित्व कर सकें।

फान चूना पत्थर तथा रोहतास चूना पत्थर में से प्रत्येक के आठ-आठ प्रतिनिधि प्रतिदर्शों का रासायनिक विश्लेषण शापिरो एवं ब्राउनाक (1959, 1962) की विधियों से किया गया तथा CO_2 की प्रतिशत मात्रा वारन (1962) विधि से ज्ञात की गई। इन चूना पत्थरों में गन्धक की प्रतिशत मात्रा की जानकारी के लिये गुणात्मक परीक्षण किये गये परन्तु कोई उल्लेखनीय परिणाम प्राप्त नहीं हुआ। ऐसा प्रतीत होता है कि दोनों हो क्षेत्रीय चूनापत्थरों में गन्धक की मात्रा अत्यल्प है।

रासायनिक विश्लेषण से प्राप्त प्रमुख घटकों की औसत प्रतिशत मात्रा सारणी 2 एवं 3 मे दी गई है।

सारणी 2

फान चूना पत्थर: रासायनिक संघटन (आठ विश्लेषणों का औसत)

प्रमुख आक्साइड	औसत भार प्रतिशत	प्रमुख आक्साइड	औसत भार प्रतिशत
CaO	34·36	P_2O_5	0·45
MgO	22·11	TiO_2	0·33
CO_2	24·97	MnO_2	0·39
SiO_2	10·44	Na_2O	1·26
Al_2O_3	1·85	K_2O	0·86
FeO	0·78	H_2O	0·55
Fe_2O_3	1·65	कुल योग	100·00

सारणी 3

रोहतास चूना पत्थर: रासायनिक संघटन (आठ विश्लेषणों का औसत)

प्रमुख आक्साइड	औसत भार प्रतिशत	प्रमुख आक्साइड	औसत भार प्रतिशत
CaO	42·95	P_2O_5	0·36
MgO	2·43	TiO_2	0·32
CO_2	30·81	MnO	0·30
SiO_2	15·52	Na_2O	0·92
Al_2O_3	3·24	K_2O	0·77
FeO	0·16	H_2O	0·58
Fe_2O_3	1·64	कुल योग	100·00

अविलेय अवशेष

फान चूना पत्थर तथा रोहतास चूना पत्थर में से प्रत्येक के आठ-आठ प्रतिदर्शों के अविलेय अवशेष ज्ञात किये गये। इसके लिये इन शैलों के छोटे-छोटे टुकडे करके एक निश्चित भार को $N/10$

हाइड्रोक्लोरिक अम्ल में डाल दिया गया। प्रक्रिया के परिणामस्वरूप बुदबुदे उठने लगे। कई दिन रखने के पश्चात् जब नलिका से हिलाने-डुलाने पर भी बुदबुदे नहीं निकले, तब उन्हें छान कर अवशेष प्राप्त किया गया। प्राप्त अविलेय अवशेषों को आसुत जल से अच्छी तरह साफ करके सुखाया गया तथा उन्हें तौल कर प्रतिशत मात्रा ज्ञात की गई। फिर बालू, गाद तथा मृत्तिका की प्रतिशत मात्रा चलनी द्वारा विश्लेषण करके ज्ञात की गई।

फान चूना पत्थर में अविलेय अवशेष की प्रतिशत मात्रा 16 से 43 के बीच पायी गई जो कि सामान्यत: उच्च अविलेय अवशेषों के विद्यमान होने का द्योतक है। जिन प्रतिदर्शों में सिलिका की मात्रा अधिक रही है उनमें अविलेय अवशेषों की मात्रा भी अधिक प्राप्त हुई है।

रोहतास चूना पत्थर में अविलेय अवशेषों की प्रतिशत मात्रा 12 से 25 के बीच पायी गई है। यह प्रतिशत मात्रा भी सामान्यत: उच्च ही है।

इन शैलों में साधारणत: गाद तथा मृत्तिका की प्रतिशत मात्रा बालू से अधिक है।

विवेचना

चूना पत्थर का आर्थिक महत्व

चूना पत्थर औद्योगिक विकास की आधार पीठिका है। विभिन्न उद्योगों में इसका विभिन्न उपयोग है तथा इसकी मांग दिनोंदिन बढ़ती जा रही है। इनका मुख्य उपयोग पोर्टलैण्ड सीमेंट-निर्माण में है। भवन-निर्माण तथा सड़क पत्थर के रूप में भी इसका व्यापक उपयोग हो रहा है। लौह तथा इस्पात उद्योग में यह गालक के रूप में काम आता है। एक टन इस्पात उत्पादन में लगभग आधा टन चूना पत्थर की आवश्यकता होती है। चूना पत्थर के निस्तापन से चूना तैयार किया जाता है। कागज, चीनी, वस्त्र तथा काँच उद्योगों और श्रृंगार प्रसाधनों में भी इसकी मांग है। यहां यह मुख्यत: पूरक का काम करता है। एक विशिष्ट प्रकार का चूना पत्थर मुद्रण और नक्काशी के काम में आता है। इनके अतिरिक्त यह रासायनिक वस्तुओं के निर्माण तथा कृषि एवं खाद उद्योगो में प्रयुक्त होता है। कैल्सियम कार्बोनेट के पारदर्शी क्रिस्टल, जिन्हें 'आइसलैण्ड स्पार' कहते हैं, प्रकाशिक यंत्रों के निर्माण में काम आते हैं।

विशिष्टीकरण

विभिन्न औद्योगिक प्रयोजनों में प्रयुक्त चूना पत्थर के आवश्यक गुणों के आधार पर मानक विशिष्टीकरण तैयार किये गये हैं। उदाहरणार्थ, कागज उद्योग के लिये विशुद्ध चूना पत्थर ($CaCO_3$>95%) की आवश्यकता होती है जब कि सीमेंट बनाने लिये 75% $CaCO_3$ वाले चूनापत्थर भी उपयोग में लाये जाते हैं। विभिन्न उद्योगों में प्रयुक्त चूना पत्थर के विशिष्टीकरण सारणी 4 में दिये गये हैं।

सारणी 4

विभिन्न उद्योगों में प्रयुक्त चूना पत्थरों के विशिष्टीकरण

विभिन्न उद्योग	मिनरल वेल्थ आफ़ इण्डिया	राव, पाल, राव (1965)	सिगल (1967)	कृष्णास्वामी (1972)
1. सीमेंट निर्माण	CaO 40% (न्यूनतम) MgO 2·7% (अधिकतम) SiO_2 14–15% Fe_2O_3 2% (,,) P_2O_5 1% (,,)	CaO 42% MgO 3% SiO_2 14–15% P_2O_5 1% थोड़ी मृत्तिका	$CaCO_3$ >75% MgO <3% P_2O_5 <0·5% श्वेत पोर्टलैण्ड सीमेंट के लिये Fe_2O_3 <0·01% तथा Mn की मात्रा न्यूनतम होनी चाहिये	CaO 42% (न्यूनतम) MgO 2·5% (अधिकतम) SiO_2 14–15% (,,) P_2O_5 1% से कम
2. लोहा तथा इस्पात उद्योग	CaO 47·5–49·60% SiO_2+ Al_2O_3 4·76–7·65 MgO 4·1%	रूरकेला इस्पात संयंत्र की वात्या भट्टियों में CaO 44·5% (न्यूनतम) SiO_2 10% Al_2O_3 1% MgO 3·5% S 0·5% (अधिकतम) P 1·5% तक	प्रयोगकर्ता तथा प्रक्रिया के खर्च के अनुसार मानदंड बदलते रहते है। सामान्यत: $CaCO_3$ 98% P अतिन्यून	वात्या भट्टियों के लिये:— CaO 44·5 (न्यूनतम) SiO_2 सामान्यत: 7% (,,) MgO 4% से कम Al_2O_3 1·5% से कम S 0·5% से कम P 1·5% से कम इस्पात बनाने में:— CaO 47·5% (न्यूनतम) SiO_2 1% से कम परन्तु भारत में 4·4% तक S तथा P वात्या भट्टियों की मात्रा अविलेय अवशेष 4% से अधिक नहीं

3.	चना निर्माण	———	SiO_2 10% MgO अत्यल्प मृण्मय पदार्थ 18—20%	उच्च कैलसियम चूना के लिये:— $CaCO_3$ >90% MgO_3 <5% अन्य अशुद्धियां <3% उच्च मैग्नीशियम चूना के लिये:— $MgCO_3$ >40% अन्य अशुद्धियां <3%	SiO_2 10% तक MgO न्यूनतम
4.	कागज उद्योग	———	$CaCO_3$ 95% (न्यूनतम) MgO 3% (अधिकतम)	उच्च कैलसियम चूना पत्थर Mg अल्प $Al_2O_3+Fe_2O_3$+अम्लीय अविलेय पदार्थ <2%	CaO 45% (न्यूनतम) MgO <3%
5.	वस्त्र उद्योग	———	CaO 94% MgO 3% (अधिकतम) $Fe_2O_3+Al_2O_3$ 2% (,,) SiO_2+अविलेय 2·5% (,,)	उच्च कैलसियम चूना पत्थर MgO <3% $Fe_2O_3+Al_2O_3$ <2% SiO_2+अविलेय <2·5%	CaO 94% (न्यूनतम) MgO 3% से कम $Fe_2O_3+Al_2O_3$ 2% से कम SiO_2+अविलेय 2·5% से कम
6.	चीनी मिट्टी उद्योग	———	$CaCO_3+MgCO_3$ 97% (न्यूनतम) Fe_2O_3 0·3% (अधिकतम) SO_3 0·1% प्रथम कोटि में:— $MgCO_3$ 1% से अधिक नहीं द्वितीय कोटि में— $MgCO_3$ 8% तक	$CaCO_3+MgCO_3$ >97% Fe_2O_3 <0·3% SiO_2 <2% SO_3 <0·1%	———

7. काँच उद्योग				
	रंगहीन काँचः—	प्रथम श्रेणी का चूना पत्थरः—	कुल कार्बोनेट >98%	**रगंहीन काँचः—**
	$CaCO_3$ 94·5% (न्यूनतम)	COO+MgO 94%	लौह आक्सोइड <0·05%	CaO 55·2% (न्यूनतम)
	$CaCO_3+MgCO_3$ 97·5%	(अधिकतम)	S—P कम से कम	Fe_2O_3 0·04 से कम
	Fe_2O_3 0·20% (अधिकतम)	Fe_2O_3 0·2% ,,	C अत्यंल्प	जैव कार्बन 0·1% से कम
	समग्र अवास्पशील पदार्थ	Al_2O_3 3·0% ,,		Mn, Pb, 0·1%
		$SO_3+P_2O_5$ 1·0% ,,		S, तथा P से कम
		SiO_2 4% ,,		
		द्वितीय श्रेणीः—		
	(HCl में अविलेय) 2·0%	COO+MgO 91% (न्यूनतम)		
	(अधिकतम)	Fe_2O_3 1% अधिकतम)		
	नमी 3% (अधिकतम)	Al_2O_3 5% ,,		
		$SO_3+P_2O_5$ 1% ,,		
		SiO_2 9% ,,		
		तृतीय श्रेणीः—		
		CaO+MgO 83% (न्यूनतम)		
		Fe_2O_3 1%		
		Al_2O_3 5%		
		$SO_3+P_2O_5$ 1%		
		SiO_2 17%		
		बोतल काँच निर्माण के लिये—		
		Fe_2O_3 0·5%		
		$SiO_2+Al_2O_3$ 15%		
		S—P 1%		

			क्षार निर्माण		
8.	रासायनिक उद्योग	$CaCO_3$ 90—99% $MgCO_3$ 0—6% $SiO_1+Al_2O_3+Fe_2O_3$ 0—3%	$CaCO_3$ 90—99% MgO 6% $Fe_2O_3+Al_4O_3+SiO_3$ 0—3%	उच्च कैल्सियम चूना पत्थर,: SiO_2 $<1\%$ $CaCO_3$ $>97\%$	$CaCO_3$ 90—99% $SiO_2+Fe_2O_3+Al_2O_3$ 0—3% MgO न्यूनतम मृत्तिका के मुक्त
			विरंजक चूर्ण		
		CaO 95% (न्यूनतम) MgO 2% (अधिकतम) SiO_2 1·5% (,,) $Fe_2O_3+Al_2O_3$ 2% ,, Fe_2O_3 0.3% तक	$CaCO_3$ 96% (न्यूनतम) MgO 1·5% (अधिकतम) SiO_2 2% P_2O_5 1·1% Fe_2O_3 0 5% (,,) मृत्तिका के मुक्त	उच्च कैल्सियम चूना पत्थर तथा Mn, Fe, MgO तथा मृत्तिका की अत्यल्प मात्रा	$CaCO_3$ 96% (न्यूनतम) SiO_2 2% तक $Fe_2O_3+Al_2O_3$ 2% (अधिकतम) MgO 1·5% से कम मृत्तिका से मुक्त
			कैल्सियम कार्बाइड		
		CaO 92% (न्यूनतम) MgO 1·75% (अधिकतम) SiO_2 2% $Fe_2O_3+Al_2O_3$ 1% (,,) S 0·20% (,,) P 0·02% (,,) ज्वलन पर हानि 4% (,,)	CaO 54% $CaCO_3$ 95% (न्यूनतम) SiO_2 1—3% P 0·01—0·05% तक MgO 0·5% Fe_2O_3 1% MgO, $Al_2O_3+SiO_2$, Fe_2O_3, S—P, Na तथा K इत्यादि अशुद्धियां मानी जाती हैं	$CaCO_3$ $<97\%$ P $<0{\cdot}01\%$ MgO $<2\%$ SiO_2 3% (अधिकतम) $Fe_2O_3+Al_2O_3<0{\cdot}05-0{\cdot}75\%$ S अतिन्यून	$CaCO_3$ 95—97% SiO_2 1—3% Fe_2O_3 1% MgO 0·5%

[illegible]. चीनी उद्योग	CaO 50% (न्यूनतम) MgO 1·0% (अधिकतम) SiO_2 + अविलेय 4% $Fe_2O_3+Al_2O_3$ 1.5% अधिकतम	क्रमश: चीनी में विलेय चूना MgO (अधिकतम), गर्म, करने पर कभी (अधिकतम) स्टीफन प्रक्रिया के लिये चूनापत्थर 90% 3% – अन्य प्रक्रियाओं के लिये चूना पत्थर 85% 3% – बिना बुझा चूना स्टीफन प्रक्रिया के लिए 90% 3% 2% बिना बुझा चूना अन्य प्रक्रियाओं के लिए 85% 3% 5% चूना चूर्ण 90% 3% 2% जलयोजित चूना 86% 3% –	$CaCO_3$ – >96–97% SiO_2 –1% MgO –1–4% लौह आक्साइड – <0·5%	CaO –80% (न्यूनतम) MgO –1% से कम $Fe_2O_3+Al_2O_3$ –1·5% से कम SiO_2+ अविलेय 4% से कम
10. लिथोग्राफिक मुद्रण	———	महीन कणी, कठोर तथा समांगी गठन वाले चूना पत्थर जिनमें $SiO_2+Al_2O_3+Fe_2O_3$ की मात्रा 5% से अधिक न हो	अशुद्धियों से मुक्त तथा महीन कणी तथा समांगी गठन वाला चूना पत्थर	———
11. चर्म शोधन उद्योग	———	उच्च कैल्सियम चूना पत्थर जिसमें MgO की मात्रा अतिन्यून हो तथा जो लौह तथा अन्य धातु अशुद्धियों से मुक्त हो	उच्च कैल्सियम चूना पत्थर जिसमें लौह तथा अन्य धातुतिय अशुद्धियां कम से कम हों। MgO तथा मृत्तिका की उपस्थिति अवांछनीय है	———

12.	पेन्ट इत्यादि उद्योग	———	उच्च कैल्सियम तथा अल्प मैग्नीशियम, निम्न घनत्व तथा अति सूक्ष्म कणी चूनापत्थर	हल्के रंग का उच्च कैल्सियम तथा अन्य मैग्नीशियम चूना पत्थर जिसमें $Fe_2O_3+Al_2O_3$ तथा अम्लीय अविलेय $<2\%$	———
13.	सिलिका ईंट उद्योग	———	$CaCO_3$ 90% (न्यूनतम) MgO 4·5% (अधिकतम) $Fe_2O_3+Al_2O_3$ 1·5% SiO_2+अविलेय 3% CO_2 10% (अधिकतम)	उच्च कैल्सियम चूनापत्थर	———
14.	रबर, साबुन इत्यादि उद्योग	———	महीन कणी उच्च कैल्सियम चूनापत्थर	उच्च कैल्सियम चूनापत्थर	———
15.	जल-उपचार इत्यादि उद्योग	———	उच्च कैल्सियम चूनापत्थर अपक्षय अवरोधी	$CaCO_3$ 80% (न्यूनतम) अपेक्षात अपक्षय अवरोधी	———
16.	विस्फोटक उद्योग	———	———	शुद्ध कार्बोनेट शैल जिसमें $CaCO_3$ तथा $MgCO_3$ की मात्रा लगभग बराबर हो	———
17.	कृषि एवं खाद उद्योग	———	उच्च कैल्सियम चूनापत्थर	$CaCO_3$ 80%	———

क्षेत्रीय चूना पत्थर का महत्वथा सम्भावित औद्योगिक उपयोग

प्रस्तुत क्षेत्र के कार्बोनेट शैलों के अध्ययन से यह ज्ञात होता है कि रोहतास चूना पत्थर 'अच्छी कोटि का कैल्सियम कार्बोनेट' तथा फान चूना पत्थर 'कैल्सियम-मैग्नीशियम कार्बोनेट' (डोलोमाइट) है। इन शैलों के सूक्ष्मदर्शीय अध्ययन, रासायनिक विश्लेषण तथा अविलेय अवशेषों के आधार पर इनके सम्भावित औद्योगिक उपयोगों की विवेचना नीचे प्रस्तुत की गई है।

1. **सीमेंट उद्योग:** पोर्टलैण्ड सीमेंट निर्माण के लिये उपयोगी चूना पत्थरों में CaO 42% (न्यूनतम), MgO 3%; SiO_2 14—15% (अधिकतम) तथा P_2O_5 1% (न्यूनतम) होना चाहिये। ये सभी गुण रोहतास चूना पत्थर में उपलब्ध हैं (सारणी 3)। अतः रोहतास चूनापत्थर सीमेंट निर्माण के लिये सर्वथा उपयोगी है। यहाँ यह इंगित करना असंगत न होगा कि इस क्षेत्र के लगभग 20 किमी० उ० पू० में 'चुर्क' तथा लगभग 15 किमी० द० पू० में डाला सीमेंट कारखानों में रोहतास चूना पत्थर प्रयोग में लाया जाता है।

2. **चूना उद्योग:** गारा तथा प्लास्टर बनाने के लिये मुख्यतः ऐसे चूनापत्थरों का प्रयोग होता है जिनमें 10% SiO_2 तथा MgO की मात्रा अत्यल्प हो। मृण्मय पदार्थ की मात्रा 18—20% तक होने पर ये चूनापत्थर 'जलयोजित चूना' बनाने के काम आते हैं। रोहतास चूनापत्थर में ये सभी गुण उपलब्ध हैं। अतः चूना बनने में इसका प्रयोग किया जा सकता है। यहाँ क्षेत्र के निकट चोपन कस्बे में चूने के भट्टे हैं जहाँ इसी प्रकार चूना तैयार किया जाता है।

3. **लौह उद्योग:** हमारे देश में रूरकेला इस्पात संयंत्र की वात्या भट्टियों में प्रयुक्त चूना पत्थरों के विनिर्देश नीचे दिये गये हैं तथा तुलना की दृष्टि से उनके सामने रोहतास चूनापत्थरों के रासायनिक संघटन भी दिये गये हैं:—

	रूरकेला इस्पात संयंत्र (वात्या भट्टी)	रोहतास चूना पत्थर
CaO	44·5% (न्यूनतम)	42·95%
SiO_2	10%	15·52%
AlO_3	1%	3·24%
MgO	3·5%	2·43%

इससे प्रतीत होता है कि रोहतास चूना पत्थर का प्रयोग वात्या भट्टियों में किया जा सकता है परन्तु इस्पात गलाने वाली दूकानों में प्रयुक्त चूना पत्थर में SiO_2 की मात्रा 1% से अधिक नहीं होनी चाहिये, अतः रोहतास चूनापत्थर इस्पात निर्माण के लिये उपयोगी नहीं प्रतीत होता।

4. **कागज उद्योग:** कागज उद्योग के लिये CaO 45% (न्यूनतम) तथा MgO 3% से कम नहीं होना चाहिये। रोहतास चूनापत्थर में CaO की मात्रा लगभग 43% और MgO की लगभग 2·5% है। अनुसंधानशालाओं में कागज उद्योग में इसकी उपयोगिता पर प्रयोग वांछनीय है।

5. **काँच उद्योग:** काँच उद्योग के लिये आवश्यक विनिर्देशों के अनुसार रोहतास चूना पत्थर तथा फान चूना पत्थर तृतीय श्रेणी में आते हैं। अतः ये चूनापत्थर साधारण काँच बनाने के काम में लाये जा सकते हैं।

6. **अन्य उद्योग:** चर्म शोधन, पेन्ट, रबर, साबुन, कृषि एवं खाद उद्योग, जल-उपचार इत्यादि उद्योगों के विशिष्टीकरणों की समीक्षा तथा क्षेत्रीय चूना पत्थरों के विभिन्न गुणों की तुलना से यह ज्ञात होता है कि उपर्युक्त उद्योगों में रोहतास चूनापत्थर उपयोग में लाया जा सकता है। इन उद्योगों में उच्च कैल्सियम चूनापत्थर की आवश्यकता पड़ती है तथा रोहतास चूनापत्थर अतिशुद्ध कैल्सियम कार्बोनेट है।

उपसंहार

क्षेत्र में किये गये प्रारम्भिक अनुसंधान से आशाजनक परिणाम निकले हैं। आवश्यकता है क्षेत्र के विस्तृत अध्ययन की तथा खाइयों और वेधन यंत्रों द्वारा गहराई से प्राप्त प्रतिदर्शों के विश्लेषणों की। तभी यहाँ की खनिज सम्पदा का ठीक-ठीक मूल्यांकन किया जा सकेगा। क्षेत्रीय खनिज सम्पदा के सदुपयोग के लिये आवश्यकता है आवागमन के साधनों की, जिनका यहाँ पूर्णतः अभाव है।

उपयुक्त साधनों की पूर्ति पर यहां बड़े नहीं तो छोटे-छोटे उद्योगों की स्थापना की जा सकती है। क्षेत्र में खुली खदानों द्वारा चूना पत्थर प्राप्त किया जा सकता है तथा यथास्थान चूना बनाने की भट्टियाँ चालू की जा सकती हैं, सीमेंट कारखाने खोले जा सकते हैं तथा विशिष्ट किस्म का चूनापत्थर लौह उद्योग के लिये संरक्षित किया जा सकता है। इस प्रकार खनिज उद्योग को बढ़ावा देकर इस अविकसित क्षेत्र का विकास संभव हो सकेगा।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक प्रो० सुरेन्द्र कुमार अग्रवाल, अध्यक्ष, भौमिकी विभाग, काशी हिन्दू विश्वविद्यालय, का आभारी है जिन्होंने विभागीय प्रयोगशालाओं में कार्य करने की समुचित सुविधा प्रदान की तथा हमारा उत्साहवर्धन किया।

निर्देश

1. आडेन, जे० बी०। — **मेमोयर जी० एस० आई०**, 1933, **62**
2. कृष्णास्वामी, एस०। — India's Mineral Resources 1972, **आक्सफोर्ड एण्ड आई बी एच पब्लिशिंग कं० नई दिल्ली** 224-258
3. झिंगरन, ए० जी०। — **ट्रान्जैक्शन माइनिंग जिआलोजिकल एण्ड मेटलर-जीकल इंस्टीट्यूट इंण्डिया**, 1965 **62**, 1-13

4. मिनरल वेल्थ आफ इण्डिया। **प्रकाशन एवं सूचना निदेशालय, नई दिल्ली**

5. मिश्रा, आर० सी०। **प्रोसी० इण्डियन साइन्स कांग्रेस**, 1969, **2**, 111-142

6. राव, डी० एच० एस० वी; पाल, डी० के० तथा राव, ए० डी० पी०। **बुले० जी० एस० आई० सिरीज ए, संख्या 26**, 1965

7. वारेन, एस० जे०। **जर० सेडि० पेटरा०**, 1962, **32** (4), 877

8. विसेल, एच० एस० तथा चिलंजर, जी० वी०। Carbonate Rocks, 9A, 1967, **एलजेवियर, एमस्टरडम**

9. विज्ञान शब्दावली। **सेन्ट्रल हिन्दी डाइरेक्टरेट, भारत सरकार** 1964

10. सिगल, आर० एफ०। Carbonate Rocks 9 **बी०**, 19)7, **एलजज़ेवियर, एमस्टरडम**

11. शापिरो, एल० तथा ब्राउनाक, डब्लू० डब्लू०। **बुले० यू० एस० जी० एस०** 1036-C, 1959, 1962

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 16, No. 4, October 1973, Pages 253-264

उत्तर प्रदेश में सड़क निर्माण के लिये कंकड़ का उपयोग

आर० एस० दिक्षित
उत्तर प्रदेश पी० डब्लू० डी० रिसर्च इंस्टीच्यूट, लखनऊ

[प्राप्त—जून 16, 1973]

सारांश

उत्तर प्रदेश के विभिन्न जनपदों की कंकड़ खदानों से कंकड़ के नमूने एकत्र किये गये और उनके भौतिक गुणधर्म ज्ञात किये गये। इनके अन्तर्गत अपघर्षण, संदलन, संघट्ट, जल अवशोषण, साद तथा मृत्तिका की मात्रा और बिटुमेन (डामर) के साथ आसंजन विशिष्टतायें प्रमुख हैं। यह ज्ञात हुआ कि स्वच्छ कंकड़ से आसंजक विशिष्टता अच्छी आती है। सड़क निर्माण के लिये इन गुणों के आधार पर विभिन्न कंकड़ों की उपयुक्तता का निर्देश किया गया है।

Abstract

A study on use of kankars for road construction in U.P. *By* R. S. Dixit, U. P. P. W. D. Research Institute, Lucknow.

Samples of kankar were collected from different querries of different districts and were tested for their physical properties. The study deals with import properties for construction such as abrasion, crushing impact, water absorption, soundness, silt and clay content and adhesion characteristics with bitumen. Clean kankar gives good adhesion characteristics with bitumen than kankar having much adherent clay. Depending on the properties, the suitability of various kankars for construction has been assessed.

पक्की सड़कों के निर्माण में समुच्चय मिलावा या ऐग्रीगेट का प्रधान अंश तल तथा अन्तः आवरणों के लिये आवश्यक होता है। उत्तर प्रदेश में इस कार्य के लिये कंकड़ ही प्रमुख मिलावा के रूप में प्रयुक्त होता रहा है। आर्थिक दृष्टि से तथा उपलब्धि की दृष्टि से दूर से लाये जाने वाले पत्थरों की अपेक्षा स्थानीय स्रोतों से प्राप्त अच्छी किस्म का कंकड़ इस कार्य के लिये उपयुक्त मिलावा माना जाता रहा है। कंकड़ के मार्गों के ऊपर पत्थर का दृढ टिकाऊ परत लगाना उत्तर प्रदेश में सामान्य प्रथा रही है।

पहाड़ी इलाकों को छोड़कर कंकड़ उत्तर प्रदेश के सभी जिलों में पाया जाता है। इसके विशाल निक्षेप तराई क्षेत्र में पाये जाते हैं। ये अधिकांशतः चिकनी मिट्टी में पाये जाते हैं। इन निक्षेपों की गहराई कुछ फीट से लेकर लगभग बीस फुट तक रहती है। इस प्रदेश में कंकड़ की जो किस्में पाई जाती हैं [1,2,3] वे हैं—आलू या खण्डक (ब्लाक), बिचुवा तथा कंकरी। सिलिका (ब्लाक) काफी मोटाई के शतत संस्तर के रूप में पाया जाता है। बिचुवा के निक्षेप लगभग 1 से 7 सेमी० की ग्रंथिकाओं के रूप में पाये जाते हैं। जो ग्रंथियाँ 1 सेमी० से छोटी होती हैं वे कंकरी कहलाती हैं। बलुही मिट्टी में पाया जाने वाला कंकड़ बलुहा कंकड़ कहलाता है। कंकड़ की कच्ची बलुही किस्म को पटिया (स्लैब) कंकड़ भी कहा जाता है।

कंकड़ के भौतिक गुणधर्म उनके स्रोत तथा निक्षेपण की अवधि के अनुसार परिवर्तित हो सकते हैं। सड़क निर्माण में संलग्न इंजीनियरों के लिये ऐसे गुणधर्मों का अत्याधुनिक ज्ञान अत्यन्त सहायक हो सकता है। इस दृष्टि से उत्तर प्रदेश के विभिन्न जिलों की खदानों से कंकड़ के नमूने एकत्र किये गये और उनके भौतिक गुणों की परीक्षा की गई। इस अध्ययन में निर्माण कार्य के लिये उपयोगी गुणधर्मों का विवरण दिया गया है—यथा अपघर्षण, संदलन, संघट्ट, जलअवशोषण, निर्दोषता, साद तथा मृत्तिका की मात्रा और बिट्मेन (डामर) के साथ आसंजक विशिष्टतायें।

प्रयोगात्मक

परीक्षण के लिये नमूनों का एकत्रीकरण

इस अध्ययन के लिये कंकड़ों के नमूने इंजीनियरों के माध्यम से सड़कों के किनारे पड़े ढेरों से प्राप्त किये गये। उत्तर प्रदेश के विभिन्न जिलों से प्रत्येक नमूने का लगभग 100 किग्रा० एकत्र किया गया। सारणी 1 में उन जिलों के नाम दिये गये हैं जहाँ से नमूने प्राप्त किये गये।

प्रयोगशाला परीक्षण

सड़क मिलावा के लिये अत्यन्त महत्वपूर्ण गुणधर्मों का निश्चयन भारतीय तथा अन्य मानक परीक्षण विधियों द्वारा किया गया। ये गुणधर्म हैं—अपघर्षण प्रतिरोध, संदलन, विशिष्ट घनत्व, संघट्ट, आसंजन तथा जल अवशोषण। इन विधियों का संक्षिप्त वर्णन किया जा रहा है।

लासएंजील की अपघर्षण परीक्ष

यह परीक्षण लास एंजील की मशीन द्वारा सम्पन्न किया गया। इसकी परीक्षण विधि इण्डियन स्टैंडर्ड्स 2386-1963 में उल्लिखित है। इस स्टैंडर्ड के ए ग्रेड के लिये नमूने के 5000 ग्राम भार की आवश्यकता होती है जिसमें $1\frac{1}{2}-1''$, $1''-\frac{3}{4}''$, $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}''$, $\frac{1}{2}''-3/8''$ वाले प्रत्येक प्रभाज की 1250 ग्राम मात्रा को 5000 ± 25 ग्राम भार वाले 12 इस्पाती गोलों के साथ 500 बार घुमाया जाता है। बी-एस चलनी 10(I S चलनी 170) पर जो चूर्ण बच रहता है उसे ज्ञात करके 'अपघर्षण मान' निकाल लिया जाता है।

मिलावा संदलन परीक्षण

इसमें 6″ व्यास वाले सिलंडर के भीतर $\frac{1}{2}$″—$\frac{3}{8}$″ आकार की पत्थर की चैलियों को 4″ गहराई तक भर कर बोझ को 40 टन तक बढ़ाया गया। फिर बी०-एस० चलनी 7 (I S चलनी 240) से निकल जाने वाले कणों को ज्ञात करके उन्हें 'मिलावा संदलन मान' रूप में व्यक्त किया गया।

मिलावा संघट्ट परीक्षण

बी-एस 812-1252 तथा भारतीय मानक 2886,1963 के अनुसार यह परीक्षण किया गया। $\frac{1}{2}$″ — $\frac{3}{8}$″ आकार की पत्थर की चैलियों को 4″ व्यास वाले प्याले में रखकर 15″ की ऊँचाई से गिरने वाले 30 पौंड हथौड़े को 15 बार गिराया गया। फिर बी-एस 7 (I S चलनी 240) से गुजरने वाले कणों का प्रतिशत ज्ञात करके 'मिलावा संघट्ट मान' के रूप में व्यक्त किया।

जल अवशोषण परीक्षण

भारतीय मानक 2386—63 में वर्णित विधि से यह परीक्षण किया गया। 1—$\frac{1}{2}$″ आकार के ऊष्मक शुष्क मिलावा घान की तीन किलोग्राम मात्रा को आसुत जल में 24 घण्टों तक सिक्त रखा गया और फिर अवशोषित जल का प्रतिशत ज्ञात कर लिया गया।

साद तथा मृत्तिका की मात्रा

ऊष्मक शुष्क नमूने की 1 किलोग्राम मात्रा को नल के जल से भलीभाँति धोया गया जिससे कंकड़ों की सतह पर एक भी साद-मृत्तिका कण न लगे रहें। फिर इस धुले नमूने को ऊष्मक में 110±2° से० पर 6 घंटे तक या रात भर सूखने दिया गया और तब ठंडा करके भार ज्ञात कर लिया गया। इस प्रकार धोने से जो क्षति हुई वह साद तथा मृत्तिका की मात्रा बताती है।

निर्दोषता परीक्षा

इसके लिये आई० एस० 2386—1963 में वर्णित विधि अपनाई गई। 1 किलो घान ($\frac{3}{4}$—$\frac{1}{2}$″ 67% तथा $\frac{1}{2}$—$\frac{3}{8}$″ 33%) लेकर ऊष्मक में सुखाकर नमूने को Na_2SO_4 के संतृप्त विलयन में डुबो दिया गया और रात्रि भर इसी तरह रहने दिया गया। दूसरे दिन घान को अच्छी तरह धोकर के 100° से० पर 3-4 घंटे सुखाया गया और फिर ठंडा होने दिया गया। इस प्रकार एक चक्र पूरा हुआ। इस तरह के 10 चक्र पूरे किये गये। अन्त में घान को धोकर Na_2SO_4 से मुक्त किया गया और पुनः सुखाकर चलनी सं० IS 8 मिमी० आकार से चाल कर ऊपर बचे अंश को तौल लिया गया। भार में जो क्षति हुई उसे प्रतिशत के रूप में ज्ञात कर लिया गया।

आसंजन परीक्षण

नमूनों के आसंजन परीक्षण के लिये जलनिमज्जन परीक्षण किया गया। कंकड़ के $\frac{3}{4}$″—$\frac{1}{2}$″ आकार के धोये तथा ऊष्मक में सुखाये नमूने की 100 ग्राम मात्रा को गरम करके मिलावा के भार की

सारणी 1

उत्तर प्रदेश के कुछ कंकड़ों के परीक्षित नमूनों की संख्या तथा परीक्षण मानों के औसत परास

क्रम संख्या	जिला	लास एंजील का अप-घर्षण सूक्ष्म कणों का %	समुच्चय संदलन मान सूक्ष्मकणों का %	समुच्य संघट्ट मान सूक्ष्मकणों का %	जल अवशोषण %	मृत्तिका की मात्रा	आसंजन परीक्षण मेक्सा फाल्टे 80/100 विपट्टन	निर्दोषता परीक्षण N_2SO_4 के साथ 10 चक्कर के बाद भार में क्षति	शैलों के अध्ययन पर आधारित विशेष विवरण
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	इलाहाबाद	A 31·7	30·1	14·0	5·3	14·0			1. विन्यासित खनिजों से युक्त कंकड़ों के यांत्रिक परीक्षण मान उच्च होते हैं।
		B 28·37	30·1	14·0	5·3	14·0			
		C 3	1	1	1	1			
2.	आजमगढ़	A 22·3	19·07	...	...	...			2. आर्द्र करने पर बलुहे कंकड़ मृत्तिकायुक्त कंकड़ों से अधिक यांत्रिक गुण दर्शाते हैं।
		B 22·3	19·07	...	...	...			
		C 1	1						
3.	आगरा	A 29·0	29·3	12·0	5·1	...			3. निर्दोषता परीक्षण के समय कच्चे कंकड़ जिसमें मृत्तिका लगी रहती है, अधिक भार-क्षति प्रदर्शित करते हैं।
		B 29·0	29·3	12·0	5·1	...			
		C 1	1	1	1				

4.	बस्ती	A 21·8	18·2	15·3	4·2	...	[illegible]	4. क्वार्ट्ज के कोणीय कणों वाले कंकड़ों में उपकोणीय क्वार्ट्ज युक्त कंकड़ों की अपेक्षा अच्छे मान प्राप्त होते हैं।
		B 1·86-24.5	15·5·21·5	11·0-21·0	2·1-5·4	...	3	
		C 9	9	9	2			
5.	बरेली	A	21·21	13·5	...	13.51		5. क्वार्ट्ज के कणों के महीन होने से कंकड़ों के यांत्रिक गुणों में सुधार होता है।
		B	15·5-25	11·0-17·0		10-20·5		
		C	4	3		4		
6.	बाराबंकी	A 23·0	27·65	29·15	5·0	...	...	6. अभ्रक की मात्रा कम होने से यांत्रिक गुणों में ह्रास होता है।
		B 23·0	27·6	29·1	5·0	...		
		C 1	1	1	1			
7.	देवरिया	A 25·0	22·8	12·8	3·2	11·5	5·20	
		B 22·0-30	18·4-25	11·0-15	2·5-4·0	11·5	5	
		C 7	7	7	7	1		
8.	फैजाबाद	A 25·5	18·1	9·6	4·4	...	...	
		B 24·27	18·0-18·1	7·9-11·8	3·6-5·2			
		C 2	2	2	2			
9.	फतेहपुर	A 30·2	24·2	28·7	4·9	...	0·15	
		B 18·25-74·4	14·7-42	28·65	4·86	...		
		C 12	12	1	12		3	

क्रम संख्या	जिला	लास एंजील का अपघर्षण सूक्ष्मकणों का %	समुच्चय संदलन मान सूक्ष्मकणों का %	समुच्चय संघट्टमान सूक्ष्मकणों का %	जल अवशोषण %	मृत्तिका की मात्रा	आसंजन परीक्षण मेक्सा फाल्ते 80/100 विपट्टन	निर्दोषता परीक्षण N_2SO_4 के साथ 10 चक्कर के बाद भार में क्षति%	शैलों के अध्ययन पर आधारित विशेष विवरण
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10.	गोरखपुर	A 31·8	26·01	15·1	3·9	...	...		
		B 25·5-40·5	20·9-32·0	9·7-20·0	2·0-5·9				
		C 10	10	10	9				
11.	गोला	A 22·3	22·8	19·3	3·8	...	12	...	
		B 22·3	22·8	19·3	3·8		1		
		C 1	1	1	1				
12.	हरदोई	5 . 6	20·6	15·5	4·3		10	...	
		B 24·3 27·3	14·5-27·0	14·0-21·8	3·0-5·2		...		
		C 5	5	5	5		6		
13.	खीरी	A 27·5	23·5	16·5	4·6	7·5		...	
		B 23-32	17.5-30	14·2-18·8	3·6-5·6	1			
		C 2	2	2	2				
14.	कानपुर	A 26·9	20·1	16·7	4·5	...		...	
		B 26·8-27·0	20·1-20·2	16.0-17·4	4·2-4·8				
		C 2	2	2	2				
15.	लखीमपुर खीरी	A 24·0	22·35	10·2	4·07	10			
		B 24·0	22·35	10·2	4·07	...			
		C 1	1	1	1				

16.	लखनऊ	A 31·8	23·93	17·1	4·53	25·56	*0·50+	13·5	
		B 22·0-40·5	17·0-39·0	9 0-26·6	1·5-8·3	10·0-44		+9-43·67*	
		C 24	31	20	22	15	10	7	
17.	मुरादाबाद	A 32·0	...	...	...	...	...	...	
		B 32·0							
		C 1							
18.	मेरठ	A 19·25	15·08	10·75	2·7	...		...	
		B 19·29	15·08	10·75	2·7				
		C 1	1	1	1				
19.	रायबरेली	A 27·0	20·13	14·3	3 6	1·25			
		B 21·0-33	19·0-21	13·1-15·5	3·25-3·67	1·25			
		C 2	2	2	2	1			
20.	सीतापुर	A 22·43	21·1	11·7	4·2	...			
		B 17·8	13·0-26	10·5-14	3·6-5·0	...			
		C 3	3	3	3				
21.	उन्नाव	A 33·14	25·81	26·15	5·0	12·5	5%*	12·1	*बिना धोये परीक्षा की गई।
		B 23·0-47·5	19·2-36·4	24·20-28·1	3·3-6·7	4·06-21		+9·5-14·0*	+धोने के बाद परीक्षा की गई।
		C 14	9	2	2	2	1	4	

मात्रा 80/100 प्रभेदन ग्रेड बिटुमेन की मिलाई गई। इसके बाद 250 मिली० बीकर में भरकर लगभग दो घंटे तक कमरे के ताप पर ठंडा होने दिया गया। फिर बीकर में नमूने के ऊपर लगभग 2'' की ऊँचाई तक पानी भर दिया गया। इसके बाद बीकर को 40° पर एक उष्मक में 24 घंटे तक रहने दिया गया। दूसरे दिन कंकड़ के टुकड़ों से छूटी हुई पट्टिकाओं का प्रतिशत आँख से देखकर ज्ञात किया गया। इस परीक्षण में एकसाथ दो नमूने प्रयुक्त किये गये।

शैल रचना परीक्षण

शैल रचना परीक्षण भारतीय मानक 2386 (भाग 8) 1963 के अनुसार किया गया। कंकड़ों के वर्गीकरण के लिये मेगास्कोपीय अध्ययन किया गया। खनिज के बड़े कणों के लिये यथा कैल्साइट क्वार्ट्ज आदि के लिये स्लाइड तैयार किये गये।

यांत्रिक गुणों पर आर्द्र करने का प्रभाव

चूँकि वर्ष के अधिकांश समय में कंकड़ आर्द्र रहता है अतः सम्भव है कि शुष्क अवस्था में किये गये यांत्रिक परीक्षण क्षेत्रीय आचरण के साथ उत्तम सहसम्बन्ध न प्रदर्शित कर सकें। फलतः प्रारम्भिक तीन परीक्षणों को आर्द्र अवस्थाओं में, 24 घंटे तक सिक्त रखने के बाद सम्पन्न किया गया। ऐसे परिणाम सारणी 2 में अंकित हैं।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1 में नमूनों की संख्या तथा यांत्रिक गुणों, साद तथा मृत्तिका मात्रा, निर्दोषता और आसंजन परीक्षण से प्राप्त मानों के परास तथा औसत दिये हुये हैं। परिणामों से स्पष्ट है कि कंकड़ों के परीक्षण मान एक खदान से दूसरी खदान में परिवर्तित होते हैं जो सम्भवतया कंकड़ों के संघटन, उनके बनने की विधि तथा मूल मिट्टी की प्रकृति और परिपक्वता की कोटि के कारण हैं।

सारणी 1 में समाविष्ट शैल रचना अध्ययन से पता चलता है कि जिन कंकड़ों में क्वार्ट्ज के छोटे तथा उपकोणीय कण होते हैं उनकी किस्म बड़े आकार के क्वार्ट्ज तथा अभ्रक के कणों से युक्त कंकड़ों से अच्छी होती है।

सारणी 2 से विदित होता है कि आर्द्र करने पर कंकड़ के अपवर्षण मान घट जाते हैं जो कंकड़ के साथ लगी हुई मृत्तिका के स्नेहन गुणधर्म के कारण हैं। लेकिन देवरिया जिले की कसिया की ताजवालिया खदान तथा हरदोई जिले की चौंधिखा खदान के कंकड़ों का अपघर्षण मान बढ़ा है जो कंकड़ों की बलुही प्रकृति के कारण स्नेहन के अभाववश हो सकता है।

आर्द्र होने पर सभी कंकड़ों के संदलन मानों में वृद्धि देखी गई जिसका कारण यह है कि जल शोषण के बाद कंकड़ मुलायम पड़ जाते हैं। यही प्रवृत्ति संघट्ट मानों में भी पाई जाती है। यह वृद्धि कंकड़ नमूनों में मधुमक्षिका के छत्ते जैसी रचना की उपस्थिति के कारण है।

निर्दोषता परीक्षण के समय कंकड़ का कच्चा अंश तथा संलग्न साद और मृत्तिका अंश आसानी से विलग हो जाते हैं। फलतः यह परीक्षण सड़क की सतह पर कंकड़ बिछाने पर सम्भावित भौत-रासायनिक अपक्षय के फलस्वरूप विघटन के सम्बन्ध में अनुमान का सूचक है।

कंकड़ों में चूनायुक्त पदार्थ होने के कारण अधिकांश नमूनों के आसंजन परीक्षण उत्तम रहे क्योंकि चूनायुत पदार्थ डामर के साथ भलीभांति आसंजित हो जाता है।

सारणी 2 से विदित होता है कि सड़कों में मध्यम यातायात के अन्तर्गत 4-5 वर्षों तक और भारी यातायात के अन्तर्गत 2-3 वर्षों तक कंकड़ चलता है। शुष्क अवस्था में सन्तोषजनक क्षेत्रीय सम्प्रयोग के लिये यांत्रिक गुणधर्मों के मान सामान्यतः इस प्रकार पाये गये—अपघर्षण मान 35, मिलावा संदलन मान 37 तथा मिलावा संघट्ट मान 23। कंकड़ों में जल अवशोषण 5% से अधिक नहीं होता अतः क्षेत्रीय आचरण सन्तोषजनक पाये जाते हैं।

कंकड़ों की सतह का अपक्षय इसलिये होता है कि कंकड़ों में मधुमक्खी के छत्ते जैसी संरचना होती है, पृष्ठीय वयन असमान होता है और मृदु खनिज पाये जाते हैं जिससे संदलन प्रतिरोधकता निम्न कोटि की रहती है, यातायात होने पर कंकड़ की ऊपरी सतह पिस कर धूल में परिणत हो जाती है। आर्द्र रहने पर विघटित पिंड तथा छोटे छोटे कंकड़ खण्डों से अच्छी तरह बँध जाते हैं किन्तु सूखे मौसम में तेजी से चलने वाली टायरदार गाड़ियों के द्वारा धूल के रूप में ऊपर उड़ने लगते हैं। इस प्रकार लगातार घर्षित होने से कंकड़ की मोटाई घटती जाती है। फिर वर्षा के दिनों में विघटित पिंड घुलकर बह जाता है जिससे रंध्रता बढ़ जाती है और अन्त में सड़क की सतह ऊबड़-खाबड़ हो जाती है।

निष्कर्ष

1. यांत्रिक गुणधर्मों के आधार पर कंकड़ों को निम्नांकित प्रकार से वर्गीकृत किया जा सकता है :

कंकड़ की किस्म	अपघर्षण मान		संदलन मान		संघट्ट मान	
	शुष्क	आर्द्र	शुष्क	आर्द्र	आर्द्र	शुष्क
उत्तम (से अधिक नहीं)	25	25	20	25	22	25
औसत ,,	35	35	30	35	27	30
निम्न (से अधिक)	35	35	30	35	27	30

2. सड़क के लिये कंकड़ों की उत्तमता का श्रेष्ठतर अनुमान आर्द्र परीक्षण से हो सकता है, शुष्क परीक्षण से नहीं।

3. कंकड़ स्वच्छ होने पर बिटुमेन के साथ उत्तम आसंजन गुण प्रदर्शित करता है।

4. कंकड़ से बनी सड़क 1-5 वर्ष तक चलती है।

सारणी 2

उत्तर प्रदेश के कुछ कंकड़ों को भिगोने पर

परीक्षण

क्रमांक	जिला	खदान का नाम	अपघर्षण परीक्षण मान %		समुच्चय का संदलन मान	
			शुष्क	आर्द्र	शुष्क	आर्द्र
1.	आगरा	हिरनेर	29·00	22·5	29·3	30·9
2.	बस्ती	परसोनिया	21·0	20·5	21·45	27·3
		लंगड़ा पारसा	19·5	17·0	16·0	25·5
3.	कसिया (देवरिया)	बेन सहियाँ	27·0	20·5	22·6	28·6
		ताजवालिया	22·25	25·5	18·4	26·65
		बाक-कटिया	24·8	21·0	24·9	29·0
		परसोना	22·2	21·0	24·6	28·2
		वेलावर	22·75	22·7	25·0	30·0
		जमुना	25·25	23·2	21·3	27·3
		सरजेमदेई	[illegible]0·0	25·75	22·95	26·0
4.	फैजावाद	रामनगर	26·5	24·25	18·05	29·5
		गौजरी	24·55	19·7	18·1	22·25
5.	गोला	गोकन	22·25	18·5	22·75	26·00
6.	गोरखपुर	भीखमपुर	34·85	30·5	27·8	30·7
		खँदान हरपुर	40·5	...	29·9	...
		बरगधी	23·75	23·6	23·7	25·0
		बरईपुर	27·0	24·8	20·7	25·9
7.	हरदोई	बलेहरा	27·3	27·75	21·55	28·2
		चंदन खेड़ा	26·3	29·0	27·0	34·5
		बिरहीमपुर	25·5	25·5	19·9	27·3
		नेराडा	24·3	22·25	20·2	27·3
		कोढ़ारा	24·75	21·25	14·45	23·0
8.	कानपुर	बहादुरपुर	27·0	...	20·0	...
		करबिगवाँ	26·8	...	20·0	...
9.	लखनऊ	नगवामऊ	23·3	...	17·0	...
		धनवा बालू	29·5	...	20·8	...
10.	राय बरेली	अमेरिया खदान	21·00	...	19·0	...
11.	सीतापुर	सरबहानपुर खदान	17·75	...	13·0	...

यांत्रिक परीक्षण मानों तथा स्थलीय प्रकृति पर प्रभाव

मान समुच्चय प्रदायक परीक्षण		जल अवशोषण %	स्थलीय प्रकृति के सम्बध में विशेष सूचना
शुष्क	आर्द्र		
12·0	17·25	5·1	
15·76	18·6	4·0	सन्तोषजनक
...	...	4·0	
13·7	17·9	2·65	
11·55	14·48	3·0	
15·05	21·2	8·9	
13·4	19·88	3·5	
13·04	13·2	2·5	
11·0	13·6	3·75	
12·1	17·6	2·95	
11·85	14·3	5·25	
7·9	8·45	3·6	
19·25	19·45	3·75	सन्तोषजनक आचरण
19·7	23·45	5·9	सन्तोषजनक तथा मध्यम गुण। नवीन सतह लगभग 3 वर्षों तक चलती है।
14·3	...	4·75	कच्ची किस्म का कंकड़
16·1	18·35	2·5	
17·6	20·65	4·0	
14·9	17·65	3·0	
21·77	25·9	5·0	सन्तोषजनक किन्तु 12 पौंड के ढुरमुस द्वारा ठीक से बैठता नहीं। 1 वर्ष बाद सतह ऊबड़-खाबड़ हो जाती है।
21·0	22·5	5·2	कोई ऊबड़-खाबड़पना नहीं दिखता, सन्तोष जनक।
18·0	18·4	4·0	
11·5	19·0	4·0	अच्छी है और आचरण भी अच्छा है।
17·5	...	4·8	प्रतिदिन लगभग 300 टन के औसत यातायात के अन्तर्गत लगभग 4 वर्षों तक टिकाऊ।
16·0	...	4·2	सड़क पर ठीक चलता है।
11·0	...	5·0	कम यातायात होने पर अत्यन्त सन्तोषजनक।
20·7	...	4·5	कंकड़ ठीक आचरण करता है।
13·0	...	3·3	सन्तोष जनक।
10·5	...	4·0	कम यातायात में ठीक से काम करता है। सूखे मौसम में खण्ड-खण्ड होने की प्रवृत्ति जिससे सतह बराबर नहीं रह पाती। प्रतिदिन 500 टन यातायात वाली सड़क के लिये अत्यन्त उपयुक्त।

5. बड़े बालू के कणों से युक्त अथवा कच्चे कंकड़ के यांत्रिक गुणधर्म निम्न कोटि के होते हैं।

6. सड़क बनाने के लिये निर्दोषता परीक्षण अच्छा है क्योंकि भौत-रासायनिक विघटन का अनुमान लगाया जा सकता है।

7. सामान्य यातायात के लिये कंकड़ उपयोगी हो सकता है किन्तु जिस विधि से कंकड़ का अपक्षय होने से ऊबड़ खाबड़ सतह बनती है उसे देखते हुये डामर के साथ मिलाकर इसका उपयोग संस्तुत किया जाता है। भारी यातायात के अन्तर्गत कंकड़ को आन्तरिक परत के रूप में प्रयुक्त करना चाहिए। तदनुसार हमने उपयुक्त मानों के आधार पर सड़क निर्माण के लिये निम्नांकित विनिर्देश प्रस्तावित किये हैं।

परीक्षण का नाम	बिना डामर के W. B. M.	डामर युक्त W. B. M.
अपघर्षण मान (आर्द्र)	30 अधिकतम	35 अधिकतम
संदलन मान (आर्द्र)	32	37
संघट्ट मान (आर्द्र)	28	30
जल अवशोषण	5	5
निर्दोषता परीक्षण में भार में क्षति	15	15

लेखक ने उत्तर प्रदेश के ग्रेनाइट बालू पत्थर, क्वार्टजाइट तथा ईंट के कत्तलों के साथ भी ऐसे ही प्रयोग किये हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक इंस्टीच्यूट के डाइरेक्टर डा० ए० के० चटर्जी तथा भौमिकी विभाग, लखनऊ विश्वविद्यालय के अध्यक्ष डा० आर० सी० मिश्रा का अत्यन्त कृतज्ञ है जिन्होंने मार्गदर्शन किया। प्रयोगों में सहायता पहुँचाने के लिये श्री ए० एन० सिंह भी धन्यवाद के पात्र हैं।

निर्देश

1. नील एन० आर०। District Gazetteers of U. P. भाग 32, पृ० 22.
2. हाउंडर, डब्लू० पी०। Collection and Consolidation of Kankar, पृ० 75-91.
3. भारतीय मानक। 2386 : भाग I से VIII.
4. इंडियन रोड काँग्रेस। Tentative specification for single coat bituminous surface dressing.
5. रोड रिसर्च मोनोग्राफ सं० 5।
6. पी० डब्लू० डी० रिसर्च इंस्टीच्यूट की वार्षिक रिपोर्ट 1957-69।
7. उप्पल, एच० एल० तथा महेन्द्र सिंह। I. S. I. Bulletin, 14(5).

लेखकों से निवेदन

1. **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ।** प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिए।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिए तथा पंक्तियों बीच में पार्श्व में संशोधन के लिए उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये दो रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $K_4Fe(CN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिए कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstracts) में इनसे सहायता ली जा सके।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिए। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिए। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार हो कर आने चाहिए। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

8. लेखों में निर्देश (References) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—

    फॉवेल, आर० आर० और म्युलर, जे०। **ज़ाइट फिजिक० केमि०**, 1928, **150**, 80।

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिण्ट) बिना मूल्य दिये जायँगे। इनके अतिरिक्त यदि और प्रतियाँ लेनी हों, तो लागत मूल्य पर मिल सकेंगी।

10. लेख **"सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, प्रयाग"**, इस पते पर आने चाहिए। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबंध सम्पादक